VÝRAZY

Eva Zummerová

1. Výraz – pojem, číselná hodnota výrazu, definičný obor výrazu

Číselný výraz je matematicky zápis tvorený číslami, zátvorkami a matematickými operáciami.
Napr. : 8; 9 + 3; 2.(7–1):4; 9.[7 – 2.(125 – 15):11 + 4]; 2^5; ... .
Hodnota číselného výrazu je číslo, ktoré získame vypočítaním operácií, ktorými je výraz vytvorený.
(Hodnota výrazu $2+5-3.2$ je 1 , lebo $2+5-3.2=2+5-6=7-6=1$.)

Algebraický výraz je matematický zápis obsahujúci konštanty (čísla), premenné, znamienka počtových operácií (sčítania, odčítania, násobenia, delenia, umocňovania a odmocňovania) a podľa potreby aj zátvorky (určujú poradie uskutočnenia operácií), ktoré sú zapísané podľa určitej dohody. Premenná je ľubovoľné písmeno, ktoré zastupuje čísla z určitého číselného oboru.
Napr. : $4x$; $17a + 2b - c^4$; $6a.(y-9)$; $2xyz$; ... .
Hodnota algebraického výrazu pre dané hodnoty premenných je číslo, ktoré dostaneme ako výsledok po dosadení daných hodnôt do výrazu a prevedení všetkých operácií.
(Hodnota výrazu $a-12$ pre $a=4$ je –8, pretože : za a dosadíme do výrazu číslo 4. Dostaneme $4-12=-8$.
Hodnota výrazu $6x^2-5y$ pre $x=2, y=-3$ je 39, pretože : za x dosadíme 2, za y dosadíme -3 a dostaneme: $6.2^2-5.(-3)=6.4+15=24+15=39.$)

Definičný obor výrazu je množina všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť za premennú a daný výraz bude mať zmysel. To znamená, že nenastane neprípustná operácia – napr. delenie nulou, odmocňovanie záporného čísla, 0^0 a pod.

Príklad:
Určte definičný obor výrazov : $2a+18$; $\sqrt{3x}$; $\frac{7}{x}+\frac{3x}{x-5}$

$2a+18$ - za a môžeme dosadiť ľubovoľné číslo, k spornej operácii nedôjde, preto def. obor výrazu je množina všetkých reálnych čísel – $\boldsymbol{R}$.

$\sqrt{3x}$ - odmocňovať vieme len nezáporné čísla, preto musí byť $3x \geq 0 \quad /:3 \Rightarrow x \geq 0$. Za x teda môžeme dosadzovať čísla z intervalu $\langle 0, +\infty)$ a teda definičný obor výrazu je $\langle 0, +\infty)$.

$\frac{7}{x}+\frac{3x}{x-5}$ - výraz obsahuje zlomky, tie nesmú mať v menovateli číslo 0. V prvom zlomku by sa tak stalo, keby $x=0$, v druhom, keby $x-5=0$ t.j. keby $x=5$. Do definičného oboru výrazu patria všetky čísla okrem 0 a 5, zapíšeme, že definičný obor je $\boldsymbol{R}-\{0; 5\}$.

1.1.
Určte hodnotu číselného výrazu :
a.) $2+7.(4.5-6.3)-9$
b.) $15-3.[5+2.(1-4)]-32:4$
c.) $1.2.3.4-5.6:10$
d.) $\sqrt{3.(4.4-4)}$

1.2.
Určte hodnotu algebraického výrazu :
a.) $2x^2+3x-5$, pre $x=-1$
e.) $6.(d-c)+1$, pre $c=-8, d=-3$

b.) $\frac{4-5x}{3-2y}$, pre $x = -4,\ y = 1$
c.) $a^3 + 2b^4$, pre $a = 3, b = 0$
d.) $(15z - 10) : (4z + 9)$, pre $z = 4$
f.) $\frac{a+b+c}{abc}$, pre $a = 1, b = 2, c = 3$
g.) $y + y^2 + y^3 - y^4$, pre $y = 2$
h.) $(x + 7).(2 - x).(x - 4)$, pre $x = -7$

1.3.
Určte definičný obor výrazu :
a.) $(5 + x).x^2$
b.) $\frac{1}{5x}$
c.) $\sqrt{x + 1}$
d.) $\frac{4x}{15}$
e.) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x}$
f.) $\frac{3x-6}{x+4} - \frac{2x}{x-1} + \frac{7}{x+3}$

1.4.
Zapíšte pomocou výrazu :
a.) súčet čísel 3 a 18,
b.) dvojnásobok čísla 9,
c.) trojnásobok čísla 12 zmenšený o 5,
d.) podiel dvojnásobku čísla 21 a čísla 14,
e.) šesťnásobok neznámeho čísla,
f.) podiel druhej mocniny neznámeho čísla a čísla 7,
g.) tretia mocnina súčtu neznámeho čísla a čísla 1.

1.5.
Zapíšte pomocou výrazu :
a.) Koľko zaplatím za nákup, ak kúpim 1,2kg pomarančov v cene *a* € za kg a 3 kg jabĺk v cene *b* € za kg?
b.) Koľko kníh sa vmestí na policu dlhú 3m, ak šírka knihy je *y* cm?
c.) Petra má 2 balíčky cukríkov, v každom z nich je *m* cukríkov. Chce ich rozdeliť svojim *k* kamarátom. Koľko cukríkov sa ujde každému z nich?
d.) V autobuse je *x* miest na sedenie a 3-krát viac miest na státie. Koľko ľudí môže cestovať v autobuse?
e.) V triede je 32 žiakov a z toho je *d* dievčat. Koľko je v triede chlapcov?

Výrazy nazývame tiež **mnohočleny**. Podľa počtu sčítancov v zápise výrazu hovoríme o jednočlenoch, dvojčlenoch, trojčlenoch, štvorčlenoch, ... Členy výrazu sú teda oddelené znamienkami + a –.

Príklad :
Určte počet členov výrazov: $2xyz$; $3x - 7a + 2b$; $2.8^2 - 6.5:2 + \frac{7+2}{3.2} - (3 + 2).(4 - 2)$.
$2xyz$ - jednočlen,
$3x - 7a + 2b$ - trojčlen, má 3 členy : $3x$; $-7a$; $+2b$
$2.8^2 - 6.5:2 + \frac{7+2}{3.2} - (3 + 2).(4 - 2)$ - štvorčlen, členy : 2.8^2; $-6.5:2$; $\frac{7+2}{3.2}$; $(3 + 2).(4 - 2)$

1.6.
Určte počet členov nasledujúcich výrazov :
a.) $a^3 - 5$
d.) $\sqrt{17}$
g.) $0{,}2x^3 - 1{,}6x^2$

b.) $7 + 24x.y^2 + y$ e.) $\sqrt{z} + \sqrt{2z} - \sqrt{3z} + 4.z$ h.) 0
c.) $-14d.4c$ f.) $19a^4 : 5b$ i.) $a - b.c.d : e$

Tak, ako ku každému číslu existuje opačné číslo (opačné číslo k 3 je –3; k –5 je 5), aj ku každému výrazu existuje opačný výraz. Dva výrazy, ktoré sa navzájom líšia iba znamienkami pred každým svojim členom, sa nazývajú **opačné výrazy**. Hodnoty dvoch navzájom opačných výrazov sú navzájom opačné čísla. (Platí to aj pre výrazy s premennými, ale do oboch výrazov musíme dosadiť tú istú hodnotu premennej.)
Ešte si pripomeňme, že členy výrazu sú oddelené len znamienkami + a –.
Opačný výraz k výrazu $3x^2 - 5x + 7.2.8$ bude výraz $-3x^2 + 5x - 7.2.8$.

1.7.
K výrazu určte opačný výraz :
a.) $-7x - 19$ c.) $y^3 - 5z.y^2 - 36z^5$ e.) $a^4 + \frac{x+2}{5-3x} - 8$
b.) $\sqrt{x} - 2 + \frac{3}{x}$ d.) $9 + 4.(3 - 7)$ f.) $(5 - d)^2 - (d + 1)^3$

2. Sčítanie a odčítanie mnohočlenov

Pri sčítaní a odčítaní mnohočlenov (výrazov) počítame vlastne s mocninami. Sčítať a odčítať môžeme len mocniny s rovnakým základom a rovnakým exponentom. Nezabúdame na pravidlá pri odstraňovaní zátvoriek – ak je pred zátvorkou znamienko +, po jej odstránení sa znamienka členov v zátvorke nemenia. Ak je pred zátvorkou znamienko –, po jej odstránení sa znamienka členov v zátvorke zmenia na opačné.

Príklad :
Spočítajte a odpočítajte výrazy : $5x^2 - 4x - 7$ a $x - 3x^2 + 11$.
- súčet : $(5x^2 - 4x - 7) + (x - 3x^2 + 11) =$ odstránime zátvorky
$= 5x^2 - 4x - 7 + x - 3x^2 + 11 =$ spočítame mocniny s rovnakým základom aj exponentom
$= 5x^2 - 3x^2 - 4x + x - 7 + 11 = 2x^2 - 3x + 4$

- rozdiel urobíme rovnakým spôsobom, najprv odstránime zátvorky, potom spočítame mocniny s rovnakým základom aj exponentom : $(5x^2 - 4x - 7) - (x - 3x^2 + 11) =$
$= 5x^2 - 4x - 7 - x + 3x^2 - 11 = 5x^2 + 3x^2 - 4x - x - 7 - 11 = 8x^2 - 5x - 18$.

2.1.
Upravte :
a.) $(25a - 12b + 9) + (4 - 18a + 15b) =$
b.) $(17a + 3b - 1) - (12a - 5b + 4) =$
c.) $(3x - 4y - 2z + 8) + (2x - 5) - (3y + 11z) =$
d.) $(k + 2m - 3n + 4j) - (3m - 2k - 7n + 8j) - 6m + j =$

e.) $3u - 2v + [4u - (5v + u) + 2u] - (4v - 5u) =$
f.) $x - (2x - 3y) + 5y + (7y - 4x) - 6x - (9y - 5x) - 6y =$

2.2.
Upravte :
a.) $(4a^2 - a^3 + 5a) + (a^3 - 2a^2 + a + 7) - (6 - 8a + 5a^3 + 2a^2) =$
b.) $x^2y - 2x^2 + 3y^2 - (7x^2 - y^2 + x^2y) + 5x^2 - 2y^2 =$
c.) $u - v + (u + v) - (v - u) + (u - v) - (v + u) =$
d.) $a^2 + (b^2 - c^2) + b^2 - (a^2 + c^2) - c^2 - (a^2 - b^2) =$
e.) $(a - b) - (b + c - d) + (b - c + d) + (2b - a) - (d - c - b) + 2a =$
f.) $(9u^2 - 8u^2v + 3uv^2 - v^2) - (4uv^2 - v^2 + 5u^2 - 7u^2v) + uv^2 + u^2v =$
g.) $(9a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - 7b^3) - (7a^3 + 2a^2b + 9ab^2 - 11b^3) - a^3 - (ab^2 + 3a^2b) =$
h.) $(18y^2 - 2y^3) + (5y - 12y^2 - 7) - (4y^3 + 6) - (y - 12) + (9y^3 - y^2 + 1 + 2y) =$

3. Násobenie mnohočlenov

Výrazy násobíme systémom „každý s každým“ , to znamená, že každý člen prvého výrazu vynásobíme s každým členom druhého výrazu. Ukážeme si to na príkladoch :

- $7x^2.(x^3 - 3x + 2) = 7x^2.x^3 + 7x^2.(-3x) + 7x^2.(+2) = 7x^5 - 21x^3 + 14x^2$
- $(2x + 1).(3x^2 - 5x + 4) = 2x.3x^2 + 2x.(-5x) + 2x.(+4) + 1.3x^2 + 1.(-5x) + +1.(+4) = 6x^3 - 10x^2 + 8x + 3x^2 - 5x + 4 = 6x^3 - 7x^2 + 3x + 4$

3.1.
Vynásobte a upravte :
a.) $5a^2.(3a - 4) =$
b.) $-7x^3.(2x - y + x^2 + 1) =$
c.) $x^2y.(x - 3y + xy^2) =$
d.) $(2x - 5).(3 - 4x) =$
e.) $(3a + 2b).(7b + a) =$
f.) $(u^2 + 5).(v^2 - u) =$
g.) $(b^2 + 1).(a^2 - b + 3) =$
h.) $(x + y + 2).(3x + y) =$
i.) $(5 - 4z).(y^2 + y + z) =$
j.) $(2m + n - k).(3n + 2k - m) =$

3.2.
Vynásobte a upravte :
a.) $(5a + 3b).(m + n) - (4a - 3b).(2m - 4n) =$
b.) $6x.(4y - b) + (4x - 2y).(y + 3b) =$
c.) $12a.(5m + 6n - 7) - 9m.(4a - 5n - 5) - n.(2a - 6) =$
d.) $(3x + 4y - 5).(2x - 5y + 3) - 4x.(2y - 6x - 9) =$
e.) $(u + v).(u^2 - 2v) + uv.(v^2 - u) =$
f.) $(7x + 3y).(9a - 7b) - (4x + 8y).(5a - 3b) + (6x - y).(2a + b) =$

4. Delenie mnohočlena jednočlenom

Pri delení mnohočlena jednočlenom **vydelíme každý člen** mnohočlena týmto **jednočlenom**.

Príklad :
Vydeľte výrazy $(15x^3 + 9x^2 - 12x)$ a $(3x)$.
$(15x^3 + 9x^2 - 12x) : (3x) = 15x^3 : 3x + 9x^2 : 3x - 12x : 3x = 5x^2 + 3x - 4$

4.1.
Vydeľte :
a.) $(16a^4 - 24a^3 + 18a^2 - 10a) : (2a) =$
b.) $(14x^2y - 7xy^2 + 21x^2y^2) : (7y) =$
c.) $(-16k^2n - 12n^3 + 20k^3n^2 - 8k^2n^3) : (-4n) =$
d.) $(25x^2y + 15x^2y^2 - 10x^3y^2 + 5xy) : (5xy) =$
e.) $(24m^2 - 30m^5 + 18m^6) : (-6m^2) =$
f.) $(21u^5v^6 - 27u^4v^3 + 15u^3v^4 - 9u^6v^2) : (3u^3v^2) =$
g.) $(8x^2yz^3 - 12x^4y^5z^2 + 32xy^8z^4) : (-4xyz) =$
h.) $(3a^7b^{12}c^4 + 7a^5b^9c^8 - 2a^{10}b^6c^5) : (a^4b^3c^2) =$

5. Rozklad mnohočlenov na súčin

Až budeme neskôr upravovať lomené výrazy (zlomky), budeme chcieť krátiť čitateľa a menovateľa, aby nám zlomok ostal v základnom tvare. Vieme, že krátiť zlomky môžeme iba tak, že čitateľa aj menovateľa vydelíme rovnakým deliteľom. Preto si budeme upravovať čitateľa aj menovateľa zlomku na tvar súčinu výrazov, aby sme ich mohli krátiť. Rozklad na súčin výrazov čo najnižšieho stupňa nám pomôže zjednodušovať vzorce, rýchlejšie a efektívnejšie riešiť úlohy. Výrazy budeme rozkladať na súčin vynímaním pred zátvorku a úpravou pomocou vzorcov.

5.1. Rozklad mnohočlenov na súčin vynímaním pred zátvorku

Najjednoduchší spôsob úpravy výrazu na súčin je vynímanie pred zátvorku. Ak majú všetky členy výrazu spoločného deliteľa, tak pred zátvorku vyberáme najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov. Napríklad : $3x^2 - 9xy = 3x.(x - 3y)$. Náš výraz mal 2 členy : $3x^2$ a $9xy$. Prezerám si všetky členy výrazu – postupne v nich čísla a jednotlivé premenné a hľadám najväčšieho deliteľa, ktorého vyberiem pred zátvorku. Takže :

- čísla 3 a 9 majú spoločného deliteľa 3
- premenná x je zastúpená ako x^2 v prvom člene a ako x v druhom člene – spoločný deliteľ je teda len x
- premenná y je zastúpená len v druhom člene, preto ju neviem vybrať pred zátvorku.

Vyberám teda $3x$. Čo mi ostane v zátvorke z prvého člena? $3x^2 : 3x = x$, ostane teda x. Z druhého člena mi v zátvorke ostane $-3y$ (lebo $-9xy : 3x = -3y$). Takže $3x^2 - 9xy = 3x.(x - 3y)$.

Niekedy sa však môže stať, že všetky členy nemajú žiadneho spoločného deliteľa, napríklad, keby sme chceli rozložiť na súčin výraz $2a - 2b + ac - bc$. Neexistuje žiaden deliteľ (okrem čísla 1), ktorým by sme vedeli vydeliť všetky členy výrazu. No z prvých dvoch členov sa dá vybrať číslo 2 a z druhých dvoch členov premenná c. Tak to spravme :

$$2a - 2b + ac - bc = 2.(a - b) + c.(a - b)$$

Náš upravený výraz je dvojčlen, jeho členy sú $2.(a - b)$, $c.(a - b)$. Vidíme, že oba členy majú spoločnú zátvorku $(a - b)$, takže výraz $(a - b)$ je ich spoločným deliteľom a preto ho vyberieme pred zátvorku. Z prvého člena nám v nej ostane číslo 2 a z druhého člena ostane $+c$.

$$2a - 2b + ac - bc = 2.(a - b) + c.(a - b) = (a - b).(2 + c)$$

5.1.1.

Rozložte na súčin :

a.) $15x^3 - 12x^2$

b.) $30a^2 + 50a$

c.) $28ab^2 + 14a^2b - 7$

d.) $36u^2v + 27uv^2 + 45u^2v^2$

e.) $x^3y + xy^4$

f.) $33m^2v - 27mv^3 + 24m^2v^2$

g.) $d^8 - 10d^5 + d^4 + 5d^6$

h.) $12ax - 24a^2x^2$

i.) $15abx - 9a^2y + 12ay - 21a^2x$

j.) $33z + 22a + 55$

5.1.2.

Rozložte na súčin :

a.) $ax + ay - 5x - 5y$

b.) $8 + 4y + 2x + xy$

c.) $15 - 3y + 5y - y^2$

d.) $8a + 12b + 2ax + 3bx$

e.) $6x^2 + 2x - 3x - 1$

f.) $10x - 5ax - 2y + ay$

g.) $ay^4 - 6b + 6a - by^4$

h.) $xy + 2x + 2y + 4$

i.) $4a^3 - 4ab - a^2 + b$

j.) $mr - ms + r - s$

5.2. Rozklad mnohočlenov na súčin pomocou vzorcov

Pri upravovaní niektorých výrazov na súčin budeme tiež používať tieto vzorce :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b).(a + b) = a^2 - b^2$

Príklad :

a.) Rozložte pomocou vzorca : $(3p+7)^2$

b.) Pomocou vzorca upravte na súčin výrazy $81x^2-18x+1$; $25c^4-64d^6$

a.) postupujeme presne podľa vzorca $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – prvý člen výrazu v zátvorke umocníme na druhú, potom vynásobíme navzájom členy výrazu a číslo 2 a nakoniec umocníme druhý člen výrazu v zátvorke na druhú :

$$(3p+7)^2=(3p)^2+2.(3p).7+(7)^2=9p^2+42p+49$$

b.) $81x^2-18x+1$ - najprv zistíme, pomocou ktorého vzorca by sme výraz mohli upraviť. Keďže ide o trojčlen a je tam znamienko –, mohol by to byť vzorec $(a-b)^2$. Podpíšme si to pod seba :

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$81x^2-18x+1$$

Prvý člen v zátvorke a určíme z toho, že $a^2=81x^2$, čiže $a=9x$. prostredný člen $18x$ sa má rovnať $2.ab$ a a už poznáme, $a=9x$. Takže $2.9x.b=18x$

$$18x.b=18x$$
$$b=1.$$

Skontrolujeme, či „sedí“ aj tretí člen nášho upravovaného výrazu : b^2 by malo byť 1.
Keďže $b=1$, tak naozaj $b^2=1$ a preto môžeme náš výraz upraviť :

$$81x^2-18x+1=(9x-1)^2.$$

Výraz $25c^4-64d^6$ má len dva členy a pripomína nám vzorec $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$.
Podpíšeme si to znova pod seba : $25c^4-64d^6$
Vidíme, že $a^2=25c^4$ a odmocnením dostávame : $a=5c^2$.
Tiež $b^2=64d^6$ a odmocnením dostávame : $b=8d^3$. Keď naše a, b dosadíme do vzorca, dostávame úpravu nášho výrazu na súčin :

$$25c^4-64d^6=(5c^2-8d^3).(5c^2+8d^3).$$

5.2.1.

Rozpíšte podľa vzorcov :

a.) $(3b+2)^2$
b.) $(4-x).(4+x)$
c.) $(5s-2t)^2$
d.) $(y^2+9).(y^2-9)$
e.) $(4a^3-3b^2)^2$
f.) $(m^2+5n)^2$
f.) $(5a-4b)^2$
g.) $(1-2y).(1+2y)$
h.) $(7u+10v)^2$

5.2.2.

Doplňte do □ chýbajúce výrazy tak, aby platila rovnosť :

a.) $(3v-\square)^2=\square-\square+4$
b.) $1-a^2=(\square-\square).(\square+\square)$
c.) $(\square+5z)^2=36t^2+60tz+\square$
d.) $(\square-2x)^2=\square-20xy+\square$
e.) $(4u-\square).(\square+\square)=\square-v^2$
f.) $(10p+\square)^2=\square+80p+\square$
g.) $(\square-1)^2=p^4-\square+\square$
h.) $(\square+7s).(\square-\square)=16t^6-\square$
i.) $(\square+\square)^2=4y^2+\square+9x^2$
j.) $(9a+\square)^2=\square+36ab^2+\square$
k.) $(5u-\square)^2=\square-\square+16v^2$
l.) $9-\square=(\square+\square).(\square-z)$

5.2.3.
Rozložte na súčin :

a.) $4x^2 - 4x + 1$
b.) $9p^2 - 16r^2$
c.) $36a^2 + 48ab + 16b^2$
d.) $64u^2 - 32uv + 4v^2$
e.) $25 + 20x + 4x^2$
f.) $9v^2 - 1$
g.) $36a^2 - 84ab + 49b^2$
h.) $81y^2 - 49z^2$
i.) $64y^2 + 32y + 4$
j.) $a^2b^2 - 25$
k.) $25p^2 + 40pq + 16q^2$
l.) $16 - 24xy + 9x^2y^2$

5.2.4.
Rozložte na súčin :

a.) $x^2 + 8x + 16$
b.) $9x^2 - 81y^4$
c.) $4a^4b^2 - 20a^2bc + 25c^2$
d.) $64 + 80p^2r^8 + 25p^4r^{16}$
e.) $9y^4 - 60y^2z^3 + 100z^6$
f.) $a^4 + 8a^2b + 16b^2$
g.) $p^4q^{10} - 100$
h.) $49x^2y^6 - 14xy^3 + 1$
i.) $a^{12}x^8 - 36b^2y^{10}$

6. Lomené výrazy

Lomený výraz je **zlomok**, ktorý **má v menovateli výraz s premennou**. Napríklad výraz $\frac{7x-2}{3}$ nie je lomený výraz, pretože v menovateli nemá výraz s premennou.
Avšak výrazy $\frac{7x-2}{x}$; $\frac{3}{2x+5}$; $\frac{-5a}{2a-3b}$; $\frac{x^2}{y^3+3xy}$; ... sú lomené výrazy – každý z nich má v menovateli výraz s premennou.
Výraz má zmysel – ak sa v menovateli nenachádza nula – preto pri riešení úloh s lomenými výrazmi **vždy určujeme podmienky riešiteľnosti, resp. definičný obor** daných výrazov.
Napríklad výraz $\frac{x}{(x-3).(x+9)}$ má zmysel za podmienok : $x \neq 3, x \neq -9$ a teda jeho definičný obor je $\boldsymbol{R} - \{-9, 3\}$.

6.1.
Určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel :

a.) $\frac{7x+4}{y}$
b.) $\frac{3a-9}{a+6}$
c.) $\frac{yz}{5x}$
d.) $\frac{m+7}{m-7}$
e.) $\frac{5}{(x+5).(x-5)}$
f.) $\frac{9z-4t}{(t-1).(z+8)}$
g.) $\frac{r}{2s} - \frac{3}{5s}$
h.) $\frac{d+3}{2d+10}$
i.) $\frac{p-q-1}{p.(q+1)}$
j.) $\frac{2h}{4k} + \frac{8h+1}{k+2}$
k.) $\frac{12a-5b}{b^2}$
l.) $\frac{x}{y} + \frac{y}{2z} + \frac{z}{3+x}$

Niekedy je potrebné najprv upraviť menovateľ, aby sme vedeli určiť podmienky. Napríklad máme výrazy $\frac{3x-1}{x^2-6x+9}$; $\frac{b}{a^2-6a}$. Nevidíme hneď, kedy by sa menovateľ rovnal nule. Preto ho potrebujeme upraviť, vynímaním pred zátvorku, alebo pomocou vzorcov. Takže :

$\frac{3x-1}{x^2-6x+9} = \frac{3x-1}{(x-3)^2}$, pri určovaní podmienok, za ktorých má výraz zmysel, nás zaujíma len výraz z menovateľa : $x - 3 \neq 0$ a teda jediná podmienka je : $x \neq 3$.

$\frac{b}{a^2-6a} = \frac{2}{a.(a-6)}$, pri určovaní podmienok riešime $a.(a-6) = 0$, teda $(a \neq 0)$a $(a - 6 \neq 0$ t.j. $a \neq 6)$. Podmienky sú teda dve : $a \neq 0$; $a \neq 6$.

6.2.
Určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel :

a.) $\frac{1}{p^2-2p+1}$

b.) $\frac{3t+8}{25-t^2}$

c.) $\frac{x-16y}{y^2+8y+16}$

d.) $\frac{25b-16a}{6ab-24a}$

e.) $\frac{7mk+3}{2m^2k+8m^2}$

f.) $\frac{2t^2-r^2}{r^2-81}$

g.) $\frac{8-3x}{5x^2+15x}$

h.) $\frac{7}{m^2+14m+49}$

i.) $\frac{16-u}{u^2-18u+81}$

7. Krátenie a rozširovanie lomených výrazov

Keďže lomený výraz je vlastne zlomok, vieme ho krátiť a rozširovať podobne, ako číselné zlomky. Pripomeňme si preto :

- Rozšíriť zlomok znamená vynásobiť jeho čitateľa aj menovateľa tým istým číslom rôznym od nuly.
- Krátiť zlomok znamená deliť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom rôznym od nuly.

Podobne to bude s krátením a rozširovaním lomených výrazov.

- **Rozšíriť lomený výraz** – znamená vynásobiť jeho čitateľa aj menovateľa tým istým číslom alebo výrazom rôznym od nuly. Vždy určíme, kedy majú výrazy zmysel.
- **Krátiť lomený výraz** – znamená deliť čitateľa aj menovateľa výrazu tým istým číslom alebo výrazom rôznym od nuly. Pred krátením lomených výrazov si však najprv upravíme čitateľa aj menovateľa na súčin (ak je to potrebné) – aby sme určili spoločného deliteľa, až potom krátime. Vždy určíme, kedy majú výrazy zmysel.

Príklad :
a.) Rozšírte výraz $\frac{4x}{3y}$ výrazom $5x + y$.
b.) Rozšírte výraz $\frac{2}{3a}$ tak, aby v jeho menovateli bol výraz $15a^2b^3$.

a.) $\frac{4x}{3y} = \frac{4x}{3y} \cdot \frac{5x+y}{5x+y} = \frac{4x.(5x+y)}{3y.(5x+y)} = \frac{20x^2+4xy}{15xy+3y^2}$; P : $y \neq 0; y \neq -5x$.

b.) Lomený výraz má menovateľ $3a$. Chceme ho rozšíriť na menovateľ $15a^2b^3$. Aby sme z výrazu $3a$ dostali výraz $15a^2b^3$, potrebujeme ho vynásobiť výrazom $15a^2b^3 : 3a = 5ab^3$. Čitateľ aj menovateľ budeme teda násobiť výrazom $5ab^3$: $\frac{2}{3a} = \frac{2}{3a} \cdot \frac{5ab^3}{5ab^3} = \frac{10ab^3}{15a^2b^3}$. P: $a \neq 0$; $b \neq 0$.

7.1.

Rozšírte dané výrazy výrazom uvedeným v zátvorke :

a.) $\frac{7x-1}{3x}$; $(6x^4)$ c.) $\frac{2}{x^2y^2}$; $(9x-y)$ e.) $\frac{5pq^2}{p-1}$; $(p+1)$

b.) $\frac{4a}{3y^2}$; (a^2x) d.) $\frac{5uv}{3x}$; $(x-2u)$ f.) $\frac{3d}{5c+2}$; $(5c+2)$

7.2.

Rozšírte výrazy tak, aby v ich menovateli bol výraz $36x^4y^2z^3$:

a.) $\frac{4}{9}$ c.) $\frac{5x}{12xy^2}$ e.) $\frac{15z}{36x^4y^2z^3}$

b.) $\frac{2x}{3y}$ d.) $\frac{6yz}{4x^3yz^2}$ f.) $\frac{1}{36x^3z^3}$

Príklad :

Kráťte lomené výrazy :

a.) $\frac{5ab^2}{30a^2b}$; b.) $\frac{6x^2-6xy}{3xy^2-3y^3}$; c.) $\frac{9-x^2}{9+6x+x^2}$.

a.) $\frac{5ab^2}{30a^2b}$ - výrazy v čitateli aj menovateli sú upravené na súčin a tak už len hľadáme najväčšieho spoločného deliteľa pre výraz v čitateli a menovateli. Oba výrazy vieme deliť výrazom $5ab$, preto môžeme krátiť zlomok takto : $\frac{5ab^2}{30a^2b} = \frac{5ab^2:(5ab)}{30a^2b:(5ab)} = \frac{b}{6a}$. Aby mal pôvodný výraz zmysel, musíme uviesť podmienky : $a \neq 0; b \neq 0$.

b.) $\frac{6x^2-6xy}{3xy^2-3y^3}$ - v čitateli aj menovateli zlomku máme rozdiel, preto ich najprv musíme upraviť na súčin. Vieme to robiť vynímaním pred zátvorku a úpravou pomocou vzorcov. Ani v čitateli, ani v menovateli vzorec nevidíme a tak sa pozrieme, aký výraz by sme vedeli vyňať pred zátvorku :

$\frac{6x^2-6xy}{3xy^2-3y^3} = \frac{6x.(x-y)}{3y^2.(x-y)}$ - zlomok vieme krátiť číslom 3 a výrazom $(x-y)$ a tak to urobíme :

$\frac{\cancel{6}^2\, x.\cancel{(x-y)}}{\cancel{3}y^2.\cancel{(x-y)}} = \frac{2x}{y^2}$.

Nesmieme zabudnúť na podmienky – pôvodného, nekráteného výrazu : $y \neq 0; x \neq y$.

c.) $\frac{9-x^2}{9+6x+x^2}$ –v tomto výraze vidíme v čitateli aj menovateli vzorec a preto ho na súčin upravíme pomocou vzorcov :

$\frac{9-x^2}{9+6x+x^2} = \frac{(3-x).(3+x)}{(3+x)^2} = \frac{(3-x).(3+x)}{(3+x).(3+x)} = \frac{(3-x).\cancel{(3+x)}}{(3+x).\cancel{(3+x)}} = \frac{3-x}{3+x}$. Podmienka : $x \neq -3$.

7.3.

Kráťte lomené výrazy :

a.) $\frac{5m^6}{m^2}$ c.) $\frac{d^7}{d^{12}}$ e.) $\frac{24a^8b^5}{18a^3b^6}$

b.) $\frac{18x}{6x}$ d.) $\frac{9x^2y}{27xy^2}$ f.) $\frac{72x^2y^4z^3}{81x^3y^4z}$

7.4.

Kráťte lomené výrazy :

a.) $\frac{5a+6ab}{2a}$

b.) $\frac{6a+12b}{2a+4b}$

c.) $\frac{3x-6y}{12a-9b}$

d.) $\frac{5a-5}{a-1}$

e.) $\frac{25uv-15v}{10uv^2-6v^2}$

f.) $\frac{a^2+a}{a^2-a}$

g.) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

h.) $\frac{xy+x+3y+3}{y^2-1}$

i.) $\frac{12x^2-12y^2}{3x^2-6xy+3y^2}$

j.) $\frac{7p^2q-p^2}{49q^2-14q+1}$

k.) $\frac{4r^2+12rs+9s^2}{9s^2-4r^2}$

l.) $\frac{32km^2+80km+50k}{16m^2+40m+25}$

8. Sčítanie a odčítanie lomených výrazov

Lomené výrazy môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť a deliť rovnako, ako zlomky. Využívame pri tom vedomosti, ktoré máme o počtových operáciách s číselnými zlomkami a mocninami. Lomené výrazy sčítavame a odčítavame tak, že ich najprv upravíme na spoločného menovateľa a potom čitatele upravených zlomkov sčítame alebo odčítame. Spoločný menovateľ je zvyčajne najmenší spoločný násobok výrazov z menovateľov sčítavaných (odčítavaných) zlomkov. Ak sa dá, výsledný zlomok zjednodušíme. Dávame pozor na to, že **ak zlomok odčítavame, tak pred každým členom čitateľa sa zmení znamienko na opačné!** (Ako keby sme odstraňovali zátvorku a pred ňou bolo mínus.) Vždy určíme, kedy majú výrazy zmysel.

Príklad :

Spočítajte : a.) $\frac{3}{2a}+\frac{5}{3a^2}-\frac{7}{4a}=?$;

b.) $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{x+1}+1=?$

a.) Zlomky majú menovatele $2a, 3a^2$ a $4a$. Hľadáme ich spoločný násobok. Najprv si všímame čísla : 2,3 a 4 – ich spoločný násobok je 12. Spoločný násobok musí byť tiež deliteľný výrazom a aj výrazom a^2 – najmenší taký je a^2. Spoločný násobok výrazov v menovateľoch našich troch zlomkov bude teda $12a^2$. Všetky tri zlomky teda vhodne rozšírime tak, aby sme v ich menovateľoch dostali výraz $12a^2$:

$\frac{3}{2a}+\frac{5}{3a^2}-\frac{7}{4a}=\frac{3}{2a}\cdot\frac{6a}{6a}+\frac{5}{3a^2}\cdot\frac{4}{4}-\frac{7}{4a}\cdot\frac{3a}{3a}=\frac{18a}{12a^2}+\frac{20}{12a^2}-\frac{21a}{12a^2}=\frac{18a+20-21a}{12a^2}=\frac{20-3a}{12a^2}$. P:$a\neq 0$.

b.) Číslo 1 môžeme napísať ako $\frac{1}{1}$, takže hľadáme menovateľ, ktorý je spoločným násobkom výrazov $x-1;\ x+1; 1$. Bude to $(x-1).(x+1)$ a to je vlastne výraz x^2-1. Ďalej postupujeme presne tak, ako v predošlom príklade, rozšírime vhodne zlomky a spočítame lomené výrazy:

$\frac{4}{x-1}+\frac{3}{x+1}+1=\frac{4}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{1}\cdot\frac{(x-1).(x+1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{4x+4}{x^2-1}+\frac{3x-3}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x+4+3x-3+x^2-1}{x^2-1}=$
$\frac{7x+x^2}{x^2-1}$. P: $x\neq\pm1$.

8.1.

Spočítajte lomené výrazy:

a.) $\frac{13a}{5x} - \frac{6a}{x} + \frac{3}{5}$
b.) $\frac{2x}{x^4y^3} + \frac{y}{x^3y^4}$
c.) $\frac{3}{u} - 1$
d.) $\frac{3}{2x} + \frac{5x}{7x^2}$
e.) $\frac{2p}{p^2} - \frac{4}{p} + 3$
f.) $\frac{1}{2b^2} + \frac{2}{3b^3} - \frac{5}{b^2}$
g.) $\frac{d+1}{d^2} + \frac{3d-4}{5d^2} + \frac{1-d}{3d^2}$
h.) $\frac{2x-3}{y} - \frac{3x+2}{2y}$
i.) $\frac{3a+2b}{a} + \frac{5ab-2b^2}{ab}$

8.2.
Spočítajte lomené výrazy:
a.) $\frac{1}{y+7} - \frac{y}{(y+7)^2}$
b.) $\frac{3}{2a-1} + \frac{2}{2a+1}$
c.) $\frac{b-5}{(b+4)^2} - \frac{1}{3b+12}$
d.) $\frac{x}{5-3x} + 2 - \frac{1}{5+3x}$
e.) $\frac{4}{r+2} + \frac{3}{r-2} - \frac{7r}{r^2-4}$
f.) $\frac{5}{t-3} - \frac{t-2}{t^2-9} + \frac{t-1}{2t+6}$

9. Násobenie a delenie lomených výrazov

Lomené výrazy násobíme tak, že násobíme čitatele čitateľmi a menovatele menovateľmi. Takto získaný nový výraz upravíme podľa pravidiel na úpravu výrazov. Výsledný lomený výraz vykrátime, ak je to možné. Vždy určíme, kedy majú výrazy zmysel.

Príklad :
Vynásobte : a.) $\frac{2a^3b}{3xy} \cdot \frac{6x^2b}{ay}$;
b.) $\frac{4x^3+20x^2}{x^2+10x+25} \cdot \frac{x^2-25}{10x-2x^2}$.

a.) $\frac{2a^3b}{3xy} \cdot \frac{6x^2b}{ay} = \frac{2a^3b.6x^2b}{3xy.ay} = \frac{12a^3b^2x^2}{3axy^2} = (\text{ešte vykrátime}) = \frac{4a^2b^2x}{y^2}$. P: $a \neq 0; x \neq 0; y \neq 0.$

b.) Najprv si čitatele aj menovatele lomených výrazov upravíme na súčin, nech sa vyhneme zdĺhavému roznásobovaniu :
$\frac{4x^3+20x^2}{x^2+10x+25} \cdot \frac{x^2-25}{10x-2x^2} = \frac{4x^2(x+5)}{(x+5)^2} \cdot \frac{(x-5).(x+5)}{2x.(5-x)} = \frac{4x^2(x+5).(x-5).(x+5)}{(x+5)^2.2x.(5-x)} = \frac{4x^2\cancel{(x+5).(x-5).(x+5)}}{\cancel{(x+5)^2}.2x.(-1)\cancel{(x-5)}} = \frac{4x^2}{-2x} =$
$= -2x$. P: $x \neq 0; x \neq \pm 5.$
Po vynásobení sme dostali v čitateli výraz $(x-5)$ a v menovateli k nemu opačný $(5-x)$, preto sme si ho v menovateli upravili na $-1.(x-5)$, nech môžeme $(x-5)$ vykrátiť.

Lomené výrazy delíme tak , že prvý výraz opíšeme a vynásobíme ho prevrátenou hodnotou druhého výrazu. Ďalej postupujeme ako pri násobení lomených výrazov. Vždy určíme, kedy majú výrazy zmysel.

Príklad :
Vydeľte : $\frac{36a^2}{15b^3} : \frac{24a}{25b^2}$

$$\frac{36a^2}{15b^3} : \frac{24a}{25b^2} = \frac{36a^2}{15b^3} \cdot \frac{25b^2}{24a} = \frac{36a^2.25b^2}{15b^3.24a} = \frac{36.\ 25\ .\ a^2.b^2}{24\ .\ 15.\ b^3.\ a} = \frac{\cancel{3}.\cancel{12}.\cancel{5}.\ 5.a\ .\cancel{a}.\cancel{b}.\cancel{b}}{2\ .\cancel{12}.\cancel{5}.\cancel{3}.b\ .\cancel{b}.\cancel{b}.\cancel{a}} = \frac{5a}{2b}; \qquad \text{P: } a \neq 0; b \neq 0.$$

(zlomok vykrátime a zvýraznime, čo „zostalo“)

9.1.

Vynásobte / vydeľte lomené výrazy a upravte :

a.) $\frac{5a^4b^3}{4x^2y} \cdot \frac{16x^4y}{15a^7b^2}$

b.) $\frac{18u^5v^3}{30z^4} : \frac{27u^4v^4}{24z^5}$

c.) $\frac{2x-2}{3y} : \frac{10x-10}{5y}$

d.) $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \cdot \frac{c+d}{a-b}$

e.) $\frac{1}{x^2-x} : \frac{1}{x^3-x^2}$

f.) $\frac{a^2-b^2}{6a^2b^2} : \frac{a+b}{3ab}$

g.) $\frac{u^2-v^2}{v^2} \cdot \frac{v^4}{(u+v)^2}$

h.) $\frac{6ab-6a^2}{3a^2+a} \cdot \frac{15a+5}{30b-30a}$

i.) $\frac{b^2-25}{b^2-3b} \cdot \frac{b^2-9}{b^2+5b}$

j.) $\frac{x^2+2xy}{y} \cdot \frac{1}{x^2-4y^2}$

k.) $\frac{p^2+2pq+q^2}{p^2} : \frac{p^2-q^2}{p}$

l.) $\frac{9m^2+12km+4k^2}{10m^2k^2} : \frac{6m+4k}{5m^3k^2}$

Výsledky :

1. Výraz – pojem, číselná hodnota výrazu, definičný obor výrazu

1.1.
a.) 7; **b.)** 10; **c.)** 21; **d.)** 6.

1.2.
a.) -6; **b.)** 24; **c.)** 27; **d.)** 2; **e.)** 31; **f.)** 1; **g.)** -2; **h.)** 0 .

1.3.
a.) $\boldsymbol{R}$; **b.)** $\boldsymbol{R}-\{0\}$; **c.)** $\langle -1,+\infty)$; **d.)** $\boldsymbol{R}$; **e.)** $\boldsymbol{R}-\{0\}$; **f.)** $\boldsymbol{R}-\{-4,-3,\ 1\}$.

1.4.
a.) 3 + 18; **b.)** 2. 9; **c.)** 3.12 – 5; **d.)** (2.21) :14; **e.)** 6. x ; **f.)** x^2:7; **g.)** $(x+1)^3$.

1.5.
a.) $1{,}2.\,a+3.\,b$; **b.)** 300: y ; **c.)** $2m\!:k$; **d.)** $4.\,x$; **e.)** 32 – d .

1.6.
a.) 2; **b.)** 3; **c.)** 1; **d.)** 1; **e.)** 4; **f.)** 1; **g.)** 2; **h.)** 1; **i.)** 2.

1.7.
a.) $7x+19$
b.) $-\sqrt{x}+2-\frac{3}{x}$
c.) $-y^3+5z.\,y^2+36z^5$
d.) $-9-4.\,(3-7)$
e.) $-a^4-\frac{x+2}{5-3x}+8$
f.) $-(5-d)^2+(d+1)^3$

2. Sčítanie a odčítanie mnohočlenov

2.1.
a.) $7a+3b+13$; **b.)** $5a+8b-5$; **c.)** $5x-7y-13z+3$; **d.)** $-7m+4n+3k-3j$;
e.) $13u-11v$; **f.)** $-6x$.

2.2.
a.) $-5a^3+14a+1$; **b.)** $-4x^2+2y^2$; **c.)** $3u-3v$; **d.)** $-a^2+3b^2-3c^2$;
e.) $2a+2b-c+d$; **f.)** $4u^2$; **g.)** $a^3-13a^2b-5ab^2+4b^3$; **h.)** $5y^2+3y^3+6y$.

3. Násobenie mnohočlenov

3.1.
a.) $15a^3-20a^2$
b.) $-14x^4+7x^3y-7x^5-7x^3$
c.) $x^3y-3x^2y^2+x^3y^3$
d.) $-8x^2+26x-15$
e.) $3a^2+23ab+14b^2$
f.) $u^2v^2-u^3+5v^2-5u$
g.) $a^2b^2-b^3+3b^2+a^2-b+3$
h.) $3x^2+4xy+y^2+6x+2y$
i.) $5y^2+5y+5z-4zy^2-4zy-4z^2$
j.) $5mn+5mk-nk-2m^2+3n^2-2k^2$

3.2.
a.) $-3am+21an+9bm-9bn$
b.) $28xy+6xb-2y^2-6yb$
c.) $24am+70an+45mn-84a+45m+6n$

d.) $30x^2 - 15xy - 20y^2 + 35x + 37y - 15$
e.) $u^3 - 2uv - 2v^2 + uv^3$
f.) $55ax - 31bx - 15ay + 2by$

4. Delenie mnohočlena jednočlenom

4.1.
a.) $8a^3 - 12a^2 + 9a - 5$; **b.)** $2x^2 - xy + 3x^2y$; **c.)** $4k^2 + 3n^2 - 5k^3n + 2k^2n^2$;
d.) $5x + 3xy - 2x^2y + 1$; **e.)** $-4 + 5m^3 - 3m^4$; **f.)** $7u^2v^4 - 9uv + 5v^2 - 3u^3$;
g.) $-2xz^2 + 3x^3y^4z - 8y^7z^3$; **h.)** $3a^3b^9c^2 + 7ab^6c^6 - 2a^6b^3c^3$.

5. Rozklad mnohočlenov na súčin

5.1. Rozklad mnohočlenov na súčin vynímaním pred zátvorku

5.1.1.
a.) $3x^2.(5x - 4)$
b.) $10a.(3a + 5)$
c.) $7.(4ab^2 + 2a^2b - 1)$
d.) $9uv.(4u + 3v + 5uv)$
e.) $xy.(x^2 + y^3)$
f.) $3mv.(11m - 9v^2 + 8mv)$
g.) $d^4.(d^4 - 10d + 1 + 5d^2)$
h.) $12ax(1 - 2ax)$
i.) $3a.(5bx - 3ay + 4y - 7ax)$
j.) $11.(3z + 2a + 5)$

5.1.2.
a.) $(x + y).(a - 5)$
b.) $(2 + y).(4 + x)$
c.) $(5 - y).(3 + y)$
d.) $(4 + x).(2a + 3b)$
e.) $(3x + 1)(2x - 1)$
f.) $(2 - a).(5x - y)$
g.) $(y^4 + 6).(a - b)$
h.) $(y + 2).(x + 2)$
i.) $(a^2 - b).(4a - 1)$
j.) $(r - s).(m + 1)$

5.2. Rozklad mnohočlenov na súčin pomocou vzorcov

5.2.1.
a.) $9b^2 + 12b + 4$
b.) $16 - x^2$
c.) $25s^2 - 20st + 4t^2$
d.) $y^4 - 81$
e.) $16a^6 - 24a^3b^2 + 9b^4$
f.) $m^4 + 10m^2n + 25n^2$
f.) $25a^2 - 40ab + 16b^2$
g.) $1 - 4y^2$
h.) $49u^2 + 140uv + 100v^2$

5.2.2.
a.) $(3v - 2)^2 = 9v^2 - 12v + 4$
b.) $1 - a^2 = (1 - a).(1 + a)$
c.) $(6t + 5z)^2 = 36t^2 + 60tz + 25z^2$
d.) $(5y - 2x)^2 = 25y^2 - 20xy + 4x^2$
e.) $(4u - v).(4u + v) = 16u^2 - v^2$
f.) $(10p + 4)^2 = 100p^2 + 80p + 16$
g.) $(p^2 - 1)^2 = p^4 - 2p^2 + 1$
h.) $(4t^3 + 7s).(4t^3 - 7s) = 16t^6 - 49s^2$
i.) $(2y + 3x)^2 = 4y^2 + 12xy + 9x^2$
j.) $(9a + 2b^2)^2 = 81a^2 + 36ab^2 + 4b^4$
k.) $(5u - 4v)^2 = 25u^2 - 40uv + 16v^2$
l.) $9 - z^2 = (3 + z).(3 - z)$

5.2.3.

a.) $(2x-1)^2$
b.) $(3p-4r).(3p+4r)$
c.) $(6a+4b)^2$
d.) $(8u-2v)^2$
e.) $(5+2x)^2$
f.) $(3v-1).(3v+1)$
g.) $(6a-7b)^2$
h.) $(9y-7z).(9y+7z)$
i.) $(8y+2)^2$
j.) $(ab-5).(ab+5)$
k.) $(5p+4q)^2$
l.) $(4-3xy)^2$

5.2.4.

a.) $(x+4)^2$
b.) $(3x-9y^2).(3x+9y^2)$
c.) $(2a^2b-5c)^2$
d.) $(8+5p^2r^8)^2$
e.) $(3y^2-10z^3)^2$
f.) $(a^2+4b)^2$
g.) $(p^2q^5-10).(p^2q^5+10)$
h.) $(7xy^3-1)^2$
i.) $(a^6x^4-6by^5).(a^6x^4+6by^5)$

6. Lomené výrazy

6.1.

a.) $y \neq 0$
b.) $a \neq -6$
c.) $x \neq 0$
d.) $m \neq 7$
e.) $x \neq \pm 5$
f.) $t \neq 1; z \neq -8$
g.) $s \neq 0$
h.) $d \neq -5$
i.) $p \neq 0; q \neq -1$
j.) $k \neq 0; k \neq -2$
k.) $b \neq 0$
l.) $x \neq -3; y \neq 0; z \neq 0$

6.2.

a.) $p \neq 1$
b.) $t \neq \pm 5$
c.) $y \neq -4$
d.) $a \neq 0; b \neq 4$
e.) $m \neq 0; k \neq -4$
f.) $r \neq \pm 9$
g.) $x \neq 0; x \neq -3$
h.) $m \neq -7$
i.) $u \neq 9$

7. Krátenie a rozširovanie lomených výrazov

7.1.

a.) $\frac{42\,x^5-6x^4}{18x^5}; x \neq 0$
b.) $\frac{4a^3x}{3a^2xy^2}; a, x, y \neq 0$
c.) $\frac{18x-2y}{9x^3y^2-x^2y^3}; x, y \neq 0; y \neq 9x$
d.) $\frac{5uvx-10u^2v}{3x^2-6ux}; x \neq 0;\ x \neq 2u$
e.) $\frac{5p^2q^2+5pq^2}{p^2-1}; p \neq \pm 1$
f.) $\frac{15cd+6d}{25c^2+20c+4}; 5c \neq -2$

7.2.

a.) $\frac{16x^4y^2z^3}{36x^4y^2z^3}; x, y, z \neq 0$
b.) $\frac{24x^5yz^3}{36x^4y^2z^3}; x, y, z \neq 0$
c.) $\frac{15\,x^4z^3}{36x^4y^2z^3}; x, y, z \neq 0$
d.) $\frac{54x\,y^2z^2}{36x^4y^2z^3}; x, y, z \neq 0$
e.) $\frac{15z}{36x^4y^2z^3}; x, y, z \neq 0$
f.) $\frac{x\,y^2}{36x^4y^2z^3}; x, y, z \neq 0$

7.3.

a.) $5m^4;\ m \neq 0$
b.) $3;\ x \neq 0$
c.) $\frac{1}{d^5};\ d \neq 0$
d.) $\frac{x}{3y};\ x, y \neq 0$
e.) $\frac{4a^5}{3b};\ a, b \neq 0$
f.) $\frac{8z^2}{9x};\ x, y, z \neq 0$

7.4.

a.) $\frac{5+6b}{2}$; $a \neq 0$

b.) 3; $a \neq -2b$

c.) $\frac{x-2y}{4a-3b}$; $4a \neq 3b$

d.) 5; $a \neq 1$

e.) $\frac{5}{2v}$; $v \neq 0$; $5u \neq 3$

f.) $\frac{a+1}{a-1}$; $a \neq 0$; $a \neq 1$

g.) $\frac{x-y}{x+y}$; $x \neq \pm y$

h.) $\frac{x+3}{y-1}$; $y \neq \pm 1$

i.) $\frac{4x+4y}{x-y}$; $x \neq y$

j.) $\frac{p^2}{7q-1}$; $7q \neq 1$

k.) $\frac{2r+3s}{3s-2r}$; $3s \neq 2r$

l.) $2k$; $4m \neq -5$

8. Sčítanie a odčítanie lomených výrazov

8.1.

a.) $\frac{3x-17a}{5x}$; $x \neq 0$

b.) $\frac{3xy}{x^4y^4} = \frac{3}{x^3y^3}$; $x, y \neq 0$

c.) $\frac{3-u}{u}$; $u \neq 0$

d.) $\frac{31x}{14x^2}$; $x \neq 0$

e.) $\frac{3p^2-2p}{p^2}$; $p \neq 0$

f.) $\frac{4-27b}{6b^3}$; $b \neq 0$

g.) $\frac{19d+8}{15d^2}$; $d \neq 0$

h.) $\frac{x-8}{2y}$; $y \neq 0$

i.) $\frac{8ab}{ab} = 8$; $a, b \neq 0$

8.2.

a.) $\frac{7}{(y+7)^2}$; $y \neq -7$

b.) $\frac{10a+1}{4a^2-1}$; $2a \neq \pm 1$

c.) $\frac{2b-19}{3.(b+4)^2}$; $b \neq -4$

d.) $\frac{-15x^2+8x+45}{25-9x^2}$; $3x \neq \pm 5$

e.) $\frac{-2}{r^2-4}$; $r \neq \pm 2$

f.) $\frac{t^2+4t+37}{2.(t^2-9)}$; $t \neq \pm 3$

9. Násobenie a delenie lomených výrazov

9.1.

a.) $\frac{4bx^2}{3a^3}$; $a, b, x, y \neq 0$

b.) $\frac{8uz}{15v}$; $u, v, z \neq 0$

c.) $\frac{1}{3}$; $y \neq 0$; $x \neq 1$

d.) $\frac{a+b}{c-d}$; $a \neq b$; $c \neq \pm d$

e.) x; $x \neq 0$; $x \neq 1$

f.) $\frac{a-b}{2ab}$; $a, b \neq 0$; $a \neq -b$

g.) $\frac{v^2.(u-v)}{u+v}$; $v \neq 0$; $u \neq -v$

h.) 1; $a \neq 0$; $b \neq a$; $3a \neq -1$

i.) $\frac{(b-5).(b+3)}{b^2}$; $b \neq 0; 3; -5$

j.) $\frac{x}{y.(x-2y)}$; $y \neq 0$; $x \neq \pm 2y$

k.) $\frac{p+q}{p.(p-q)}$; $p \neq 0$; $p \neq \pm q$

l.) $\frac{m.(3m+2k)}{4}$; $m, k \neq 0$;
$3m \neq -2k$

ZDROJE :

Viera Kolbaská - Jarmila Janisková a kol. , Matematika pre stredné odborné školy, 1. časť, SPN, 2010, 2. vydanie

Jaroslav Barták – Štefan Bojtár – Jiří Kepka, Matematika 1 pre dvojročné a trojročné učebné odbory SOU, SPN, 1987

http://gymopatke.edupage.org/files/04_-_Cisla__konstanty__premenne__vyrazy_a_matematizacia_ulohy.pdf

http://pohodovamatematika.sk/vyraz-a-jeho-upravy-vysvetlenie

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/vladimira_pavlicova_bp/Vyrazy.php

http://www.sportgymke.sk/mvd/Vyrazy/1-2-2-OperacieSMnohoclenmi.pdf

http://www.sportgymke.sk/mvd/Vyrazy/1-2-4-RozkladMnohoclenovNaSucin.pdf

http://www.matematika.cz/lomene-vyrazy

http://oavranov.edupage.org/files/Lomeny_vyraz.pdf

http://www.priklady.com/sk/index.php/algebraicke-vyrazy-a-mnohocleny/vyrazy-so-zlomkami-urcovanie-podmienok