MOCNINY A ODMOCNINY

Eva Zummerová

1. Mocniny s prirodzeným exponentom

Zápis a^n (čítame „*a* na *n*-tú“), kde $a \in R$, $n \in N$ a platí : $a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n\ činiteľov}$

sa nazýva *n*-tá mocnina čísla *a*. Číslo *a* sa nazýva základ mocniny a číslo *n* sa nazýva mocniteľ, alebo exponent.

Platí teda :

$a^1 = a$,

$a^2 = a\ .\ a$,

$a^3 = a\ .\ a\ .\ a$,

$a^4 = a\ .\ a\ .\ a\ .\ a$,

$a^5 = a\ .\ a\ .\ a\ .\ a\ .\ a$,

$\vdots$

Príklad :

Vypočítajte : 2^4; $(-3)^2$; -3^2; $(-2)^3$; $-(-5)^2$; 1^{17}; 0^5; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

- $2^4 = 2.2.2.2 = 16$
- $(-3)^2 = (-3)\ .\ (-3) = 9$
- $-3^2 = -3.3 = -9$
- $(-2)^3 = (-2).\ (-2)\ .\ (-2) = -8$
- $-(-5)^2 = -(-5)\ .\ (-5) = -25$
- $1^{17} = 1.1.1\ \ldots\ .1 = 1$
- $0^5 = 0.0.0.0.0 = 0$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Priamo z definície mocniny pre ľubovoľné $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$ vyplývajú pre počítanie s mocninami tieto pravidlá :

- $\boldsymbol{1^n = 1}$
- $\boldsymbol{0^n = 0}$
- $\boldsymbol{a^r .\ a^s = a^{r+s}}$
- $\boldsymbol{(a^r)^s = a^{r\cdot s}}$
- $\boldsymbol{(a.b)^n = a^n .\ b^n}$
- $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ (resp. $\boldsymbol{(a : b)^n = a^n : b^n}$)
- ak $r > s$, tak $\boldsymbol{\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}}$

napr. :

$3^2.3^5 = (3.3).(3.3.3.3.3) = 3^7 = 3^{2+5}$

$(4^2)^3 = 4^2.\ 4^2.\ 4^2 = 4.4.4.4.4.4 = 4^6 = 4^{2.3}$

$(5.a)^3 = 5.a\ .\ 5.a\ .\ 5.a = 5.5.5.a.a.a = 5^3.a^3$

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4.4}{3.3} = \frac{4^2}{3^2}$

$\boldsymbol{\frac{2^{10}}{2^8} = \frac{\cancel{2.2.2.2.2.2.2.2}.2.2}{\cancel{2.2.2.2.2.2.2.2}} = \frac{2.2}{1} = 2^2 = 2^{10-8}}$

- ak $a < 0$, tak a^n je :
  - kladné, ak n je párne číslo,
  - záporné, ak n je nepárne číslo.

1.1.

Vypočítajte :

a.) $2^8 : 2^5 =$ c.) $2^5 . 5^5 =$ e.) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

b.) $(3.10)^3 =$ d.) $(0,4)^3 =$ f.) $\frac{5^{11}.5^8}{5^{13}.5^4} =$

1.2.

Zjednodušte :

a.) $x^3 . x^4 . x^9 =$ c.) $(a^5)^2 . a^{14} . (a^3)^6 =$ e.) $(a^3)^4 : (a^2)^5 =$

b.) $6x^4 . 5x^8 =$ d.) $y^{12} : y^6 =$ f.) $y^{15} : (y^5 . y^2)^2 =$

1.3.

Zjednodušte :

a.) $(3a)^2 . (5a^3)^2 =$ c.) $[(2y^6)^3 . (3y^7)^2] : (24y^{32}) =$ e.) $[3x . (2a^4x^3)^3] : (12x^4a) =$

b.) $\frac{x^7.x^9}{x^4.x^8} =$ d.) $\frac{(5u^2)^2.(2v^3)^2}{(10uv^2)^2} =$ f.) $\frac{m^7.k^4.(4mk^5)^2.m^3}{(2m^3k^3)^4} =$

2. Mocniny s celočíselným exponentom

Už vieme, že ak $r > s$, tak $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$. Ako by to bolo, keby $r < s$? Čomu sa rovná $\frac{a^3}{a^5}$?

$$\boldsymbol{\frac{a^3}{a^5}} = \frac{a.a.a}{a.a.a.a.a} = \frac{\cancel{a.a.a}}{\cancel{a.a.a}.a.a} = \boldsymbol{\frac{1}{a^2}}$$

ak by sme použili pravidlo $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, tak $\boldsymbol{\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}}$

spojením oboch vzťahov dostávame : $\boldsymbol{\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}}$

Zistili sme : Ak má mocnina záporný exponent, znamená to, že sa celá mocnina preklopí do menovateľa zlomku. Môžeme teda definovať mocninu s celočíselným exponentom :

Pre každé reálne číslo $a \neq 0$ a každé prirodzené číslo m platí :

$$\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

Ako je to s $\boldsymbol{a^0}$ **?**

$a^0 = a^{3-3} = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a.a.a}{a.a.a} = \frac{\cancel{a.a.a}\ 1}{\cancel{a.a.a}\ 1} = 1$, teda $\boldsymbol{a^0 = 1}$, pre všetky $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.

0^0 nie je definovaná !

A čo sa stane, ak máme mocninu so záporným exponentom v menovateli zlomku? Preklopí sa do čitateľa a exponent sa zmení na opačné číslo. Postupujeme presne podľa definície a potom upravíme zložený zlomok :

$$\frac{1}{a^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{1.a^2}{1.1} = \frac{a^2}{1} = a^2$$

Mocniny so zápornými exponentami teda presúvame z čitateľa do menovateľa a naopak.

Príklad :

Vypočítajte bez použitia kalkulačky : 4^{-2}; $(-4)^{-3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $5^6.5^{-7}.\,5^2$; $\frac{2^2.3^{-2}}{9^{-3}.4^2}$.

- $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
- $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$
- $5^6.5^{-7}.\,5^2 = 5^{6+(-7)+2} = 5^1 = 5$
- $\frac{2^2.3^{-2}}{9^{-3}.4^2} = ?$ – mocniny najprv musíme upraviť na rovnaký základ 2 a 3 :

$$\frac{2^2.3^{-2}}{9^{-3}.4^2} = \frac{2^2.3^{-2}}{(3^2)^{-3}.\,(2^2)^2} = \frac{2^2.3^{-2}}{3^{-6}.2^4} = \frac{2^2.3^6}{3^2.2^4} = 2^{2-4}.\,3^{6-2} = 2^{-2}.\,3^4 = \frac{81}{4}$$

2.1.

Vypočítajte bez použitia kalkulačky :

a.) 7^{-2} c.) 4^{-1} e.) $3^4.\,3^{-3} : 3^2$ g.) $(3^{-2})^3 .\,3^8$

b.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ d.) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$ f.) $\frac{7^4.7^{-9}}{7^{-5}}$ h.) $\frac{5^{-8}.\,5}{5^{-4}}$

2.2.

Vypočítajte bez použitia kalkulačky:

a.) $\frac{2^5.2^7}{2^{10}}$ b.) $\frac{(-3)^3.(-3)^6}{(-3)^5.\,3^2}$ c.) $\frac{(2^3\,.\,3^2)^3}{((-2)^2.3)^4}$ d.) $-\left(\frac{10^{-15}.\,10^4}{10^{-12}}\right)^2$

2.3.

Vypočítajte bez použitia kalkulačky. (Ak treba, upravte mocniny na rovnaký základ.) :

a.) $\frac{(-2)^3.\,2^2}{(-2)^2.\,2}$ c.) $\frac{15^3.5^{-2}}{3^2.2^{-1}}$ e.) $\frac{21^3.6^{-3}}{49^2.\,14^{-1}}$ g.) $\frac{33^{-3}.11^2.3^5}{11^{-1}.12\,.6^{-2}}$

b.) $\frac{(2^3.3)^3}{(2.3)^2}$ d.) $\frac{39^2.13^{-3}}{6^3.2^{-2}}$ f.) $\frac{9^{-3}.45^2.6^{-2}}{4^{-3}.\,5}$ h.) $\frac{3^{-1}.\,2\,.\,9}{3\,.2^{-1}.\,4}$

Príklad :

Zjednodušte : $[(2x^3)^2y^4]^3.(xy^2)^{-4}$; $\frac{a^8}{b^2c^3}:\frac{a^6b}{c^4(a^{-1}b^2)^3}$.

V oboch úlohách použijeme pravidlá pre počítanie s mocninami. Pri násobení mocnín s rovnakým základom exponenty spočítame, pri delení mocnín s rovnakým základom exponenty odpočítame.

- $[(2x^3)^2y^4]^3.(xy^2)^{-4} = [2^2x^6y^4]^3.x^{-4}y^{-8} = 2^6x^{18}y^{12}.x^{-4}y^{-8} = 2^6x^{18}x^{-4}y^{12}y^{-8} =$
$= 64x^{18+(-4)}y^{12+(-8)} = 64x^{14}y^4$
- $\frac{a^8}{b^2c^3}:\frac{a^6b}{c^4(a^{-1}b^2)^3} = a^8b^{-2}c^{-3} : \frac{a^6b}{c^4a^{-3}b^6} = a^8b^{-2}c^{-3} : \frac{a^6ba^3}{c^4b^6} =$
$= a^8b^{-2}c^{-3}:\frac{a^9}{c^4b^5} = a^8b^{-2}c^{-3}: a^9b^{-5}c^{-4} = a^{8-9}b^{-2-(-5)}c^{-3-(-4)} =$
$= a^{-1}b^3c$

2.4.

Zjednodušte :

a.) $(5.x^{-4}y^3z^8).(2x^5y^{-1}z^{-6})$

b.) $(30\,a^{16}b^7) : (6a^9b^{10})$

c.) $(2m^2n^{-3})^{-4}.\left(\frac{1}{2}m^{-1}n^2\right)^{-5}$

d.) $(2x.3x^2)^{-1}.18x^7$

e.) $[(3x^{-1}y^2)^3]^{-1}$

f.) $\frac{abc}{b^{-2}} : \frac{a^2c}{b^{-1}}$

g.) $\left[\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{b^2}{c^{-2}}\right)^3\right]^3 \cdot \frac{b^{-20}.\,a}{c^{15}}$

h.) $\left(\frac{c^{-3}}{ab^2}\right)^{-4} : \left[\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{a^2}{c^3}\right)^3\right]^{-1}$

2.5.

Zjednodušte :

a.) $\frac{2.(ab)^3}{3a^2b}\cdot\frac{(3a^3b^2)^2}{a^5b^3}$

b.) $\frac{5a^3b^7}{2ab^6}\cdot\left(\frac{2a^2b^3}{ab^2}\right)^3$

c.) $\frac{2\boldsymbol{x^5y^4}}{(2\boldsymbol{x^2y})^2} : \left(\frac{xy}{2x\boldsymbol{y^2}}\right)^3$

d.) $\left(\frac{a^2\,b^{-4}c^0}{c^{-3}d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^4b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2}$

e.) $\left(\frac{a^{-3}\,b^{-7}c^0}{a^{-5}b^{-11}c^{13}}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{a^2b^{-3}c^{-4}}{a^4b^7}\right)^{-2}$

f.) $\left[\left(\frac{a^2b^{-3}}{c^3}\cdot\frac{d^{-1}}{c}\right)^{-1}\right]^2 : \left(\frac{a^2c^{-4}}{b^3d}\right)^{-2}$

3. Zápis čísla v tvare *a*.10^n

Niekedy potrebujeme zapísať veľmi veľké číslo (napr. hmotnosť Slnka či Zeme), alebo naopak veľmi malé číslo (napr. hmotnosť čiastočky prachu). V zápise sa potom vyskytuje veľa núl, ktoré spôsobujú ťažkosti pri čítaní čísla a zaberajú veľa miesta – napr. 0, 000000000715. Preto také čísla výhodne zapisujeme pomocou súčinu s mocninou desiatky, v tvare $a.\,10^n$, pričom n je celé číslo. Potrebujeme preto ovládať mocniny desiatky.

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$	$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$10^3 = 1000$	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$
$10^4 = 10\,000$	$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$
$10^5 = 100\,000$	$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$
$10^6 = 1\,000\,000$	$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001$

⋮

Platí :

- **ak je *n* kladné, tak 10^n je číslo, ktoré má za číslicou 1 *n* núl**
  (napr. 10^{14} = 1 00 000 000 000 000)
  Pri násobení *n* – tou mocninou desiatky, kde *n* je kladné, posúvame desatinnú čiarku doprava o *n* miest (napr. 3,9 . 10^4 = 39 000).
- **ak je *n* záporné, tak 10^n je číslo, ktoré má $|n|$ desatinných miest, vrátane číslice 1**
  (napr. 10^{-9} = 0,000 000 001)
  Pri násobení *n* – tou mocninou desiatky, kde *n* je záporné, posúvame desatinnú čiarku doľava o $|n|$ miest (napr. 5. 10^{-7}= 0,000 000 5).

Pomocou mocnín desiatky vieme jednoduchšie zapísať napr. hmotnosť Zeme 5,983. 10^{24} kg, hmotnosť Slnka 2.10^{30} kg, hmotnosť prachovej čiastočky 7. 10^{-10} kg.
Z definície mocniny s celočíselným exponentom vieme, že deliť mocninou desiatky znamená násobiť mocninou desiatky s opačným exponentom. Napríklad 5,6:10^5 = 5,6. 10^{-5} = 0,000 056.

3.1.

Vypočítajte :

a.) 31. 10^4 =	d.) 1,75 . 10^9 =	g.) 12,8 . 10^{-8} =
b.) 276 . 10^2 =	e.) 12,803 . 10^5 =	h.) 0,055 . 10^{-1} =
c.) 0,003 . 10^7 =	f.) 45 . 10^{-3} =	i.) 197 000 . 10^{-7} =

3.2.

Doplňte správnu mocninu desiatky :

a.) 7,1 = 0,000 071 . $10^{\square}$	d.) 0,08 = 8 . $10^{\square}$	g.) 3 600 = 3,6 . $10^{\square}$
b.) 0,000 030 3 = 30,3 . $10^{\square}$	e.) 0,000 04 = 400 . $10^{\square}$	h.) 0,07 = 700. $10^{\square}$
c.) 51 300 = 51,3 . $10^{\square}$	f.) 9 = 0,000 000 009 . $10^{\square}$	i.) 12 000 000 = 0,12 . $10^{\square}$

Štandardne používame taký zápis čísla v tvare $\boldsymbol{a.\,10^n}$, že číslo $\boldsymbol{a \in \langle 1, 10)}$, $\boldsymbol{n \in Z}$. Potom hovoríme, že číslo **n je rád čísla $a.10^n$**. Napr. 25 571 zapíšeme v tvare 2,5571 . 10^4, lebo 2,5571 $\in \langle 1, 10)$ a číslo 25 571 má rád 4. Číslo 3,6 má rád 0, pretože 3,6 $\in \langle 1, 10)$ a teda ho zapíšeme ako 3,6 . 10^0.

3.3.

Zapíšte čísla v tvare $a.10^n$, kde $a \in \langle 1, 10)$:

a.) 780 000	d.) 10 080	g.) 0,000 4	j.) 12 000 000 000
b.) 5201	e.) 0,5	h.) 0,017	k.) 0,000 09
c.) 0,000 064	f.) 790	i.) 25	l.) 0,000 000 3

4. Mocniny s racionálnym exponentom. Odmocniny

Poznáme už mocninu s prirodzeným aj s celočíselným exponentom. Má zmysel uvažovať aj o mocnine s racionálnym exponentom? Čo by mohlo znamenať napríklad $a^{\frac{3}{5}}$?

Mocniny s racionálnym exponentom súvisia s odmocninami. Vieme, že odmocnina existuje len z nezáporného čísla a že platí :

- ak $a^2 = b$, tak $\sqrt{b} = a$
- ak $a^3 = b$, tak $\sqrt[3]{b} = a$
- ak $a^4 = b$, tak $\sqrt[4]{b} = a$

  $\vdots$

Skúsme nájsť súvis medzi mocninou a odmocninou. Vieme, že $a^r.\ a^s = a^{r+s}$. Ďalej vieme, že druhá odmocnina je opačná operácia k druhej mocnine, čiže $\sqrt{a^2} = a$, tiež $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. **(1)**

Vzťah **(1)** si rozpíšeme : $\sqrt{a}\ .\ \sqrt{a} = a$, teda :

Ak by sme chceli nahradiť odmocninu exponentom (ale zatiaľ nevieme akým), tak zo vzťahu **(1)** dostávame :

$$\sqrt{a}.\sqrt{a} = a^1$$
$$a^x.a^x = a^1$$
$$a^{x+x} = a^1$$

Ktoré dve rovnaké čísla musíme spočítať, aby sme dostali súčet 1? No predsa $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Odmocninu $\sqrt{a}$ teda môžeme nahradiť mocninou $a^{\frac{1}{2}}$.

Vieme teda definovať :

Nech a je reálne nezáporné číslo ($a \in R_0^+$). Potom mocninou $a^{\frac{1}{2}}$ nazývame $\sqrt{a}$.

Podobnou úvahou sa dopracujeme k definícii mocniny s racionálnym exponentom :

Nech $a \in R_0^+, n \in N$. Potom mocninou $a^{\frac{1}{n}}$ nazývame $\sqrt[n]{a}$.

Nech $a \in R^+, n \in N, m \in Z$. Potom mocninou $a^{\frac{m}{n}}$ nazývame $\sqrt[n]{a^m}$.

Príklad :

a.) Prepíšte mocninu na odmocninu: $5^{\frac{2}{3}};\ x^{\frac{7}{4}};\ z^{\frac{1}{5}}$.

b.) Prepíšte odmocninu na mocninu : $\sqrt[3]{a}, \sqrt[6]{a^4}$.

c.) Vypočítajte : $100^{\frac{1}{2}}, 8^{\frac{2}{3}}$.

Vieme, že $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. To využijeme vo všetkých úlohách.

a.) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

$x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}$

$z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{z}$

b.) $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$ (zlomok môžeme vykrátiť 2)

c.) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Pre počítanie s odmocninami platia rovnaké pravidlá ako pre počítanie s mocninami, len podmienky sa zmenili – odmocniť vieme len nezáporné čísla.

4.1.

Zapíšte ako odmocninu:

a.) $10^{\frac{1}{3}}$ c.) $2^{\frac{3}{11}}$ e.) $3^{\frac{8}{5}}$ g.) $t^{\frac{2}{8}}$

b.) $r^{\frac{5}{2}}$ d.) $x^{\frac{1}{9}}$ f.) $y^{\frac{16}{7}}$ h.) $m^{\frac{4}{10}}$

4.2.

Zapíšte ako mocninu :

a.) $\sqrt[3]{b^7}$ c.) $\sqrt[5]{x^{-2}}$ e.) $\sqrt{b^{17}}$ g.) $\sqrt[15]{z^2}$

b.) $\sqrt[4]{x^{-8}}$ d.) $\sqrt{a^6}$ f.) $\sqrt[6]{y^{11}}$ h.) $\sqrt[9]{c^4}$

Príklad :

Zjednodušte : $\left(x^{\frac{2}{3}}.x^{\frac{4}{5}}\right)^{-2}$; $\sqrt{\sqrt[3]{x^5}}$. Výsledok zapíšte ako odmocninu.

Keďže aj pre mocniny s racionálnym exponentom platia rovnaké pravidlá, ako pre počítanie s mocninami, najprv spočítame exponenty dvoch mocnín v zátvorke (mocniny majú rovnaký základ) a potom celý exponent vynásobíme číslom –2 (umocníme zátvorku). Postupovať by sme mohli aj opačne – najprv každý člen v zátvorke umocniť na –2 a potom spočítať získané exponenty.

- $\left(x^{\frac{2}{3}}.x^{\frac{4}{5}}\right)^{-2} = \left(x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}\right)^{-2} = \left(x^{\frac{10+12}{15}}\right)^{-2} = \left(x^{\frac{22}{15}}\right)^{-2} = x^{\frac{-44}{15}} = \sqrt[15]{x^{-44}}$

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt{x^{\frac{5}{3}}} = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}}$ (Najprv zmeníme vnútornú odmocninu na mocninu a potom aj vonkajšiu. Použijeme pravidlo pre umocnenie mocniny.)

4.3.
Zapíšte pomocou jednej mocniny :

a.) $\sqrt[5]{a}.\sqrt{a^3}$ c.) $\sqrt{z^3} : \sqrt[3]{z^4}$ e.) $\sqrt{m.\sqrt[3]{m^2}}$ g.) $\dfrac{\sqrt[5]{x.\sqrt[6]{x^2}}}{\sqrt{x}}$

b.) $\sqrt[4]{x^5}\,.\,\sqrt[3]{x^2}$ d.) $\dfrac{\sqrt[3]{z^2}.\sqrt{z^6}}{\sqrt[4]{z^8}}$ f.) $\sqrt[4]{a.\sqrt[3]{a}}$ h.) $\dfrac{\sqrt[3]{a.\sqrt{a^3}}}{\sqrt{a\,.\sqrt[3]{a^2}}}$

4.4.
Zapíšte pomocou jednej mocniny :

a.) $a^{\frac{3}{4}}.\sqrt{a}.\,a^{\frac{1}{6}}$ c.) $(x^{-3})^{\frac{1}{4}}.\,x^{\frac{5}{2}}$ e.) $\dfrac{\sqrt[5]{z^{14}}}{\sqrt[4]{z^5}.\sqrt[10]{z^{13}}}$ g.) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}.\sqrt[8]{x^7}}{\sqrt{x}.\sqrt[6]{x}}$

b.) $\left(a^{-\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{2}}.\,a^{\frac{2}{5}}$ d.) $\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^5 : a^{\frac{3}{28}}$ f.) $\dfrac{\sqrt{x^2.\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}.\sqrt[3]{x^2}}$ h.) $\dfrac{\sqrt[9]{x^5}.\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}.\sqrt[6]{x^4}}$

5. Čiastočné odmocňovanie

Čiastočné odmocňovanie používame, ak číslo nevieme úplne odmocniť, ale vieme aspoň zmenšiť číslo pod odmocninou. Odmocňované číslo si budeme rozkladať na súčin menších čísel. Pri odmocňovaní využijeme to, že $\sqrt{a^2} = a$, prípadne že $\sqrt[3]{a^3} = a$.

Príklad :
Čiastočne odmocnite : $\sqrt{50}, \sqrt[3]{16}$, $\sqrt{450}$.

$\sqrt{50} = \sqrt{2.25} = \sqrt{2}\,.\sqrt{25} = \sqrt{2}\,.5 = 5.\sqrt{2}$
(Číslo 2 odmocniť nevieme, ale číslo 25 áno, tak sme ho odmocnili. Výsledok zapíšeme v správnom tvare, odmocnina je na konci. Číslo pod odmocninou sa zmenšilo z 50 na 2.)

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4\,.4} = \sqrt[3]{2.2.2.2} = \sqrt[3]{2^3.2} = \sqrt[3]{2^3}\,.\sqrt[3]{2} = 2.\sqrt[3]{2}$
(Využili sme, že 3 odmocnia a tretia mocnina sa navzájom „zrušia“ a teda $\sqrt[3]{2^3} = 2$.)

$\sqrt{450} = \sqrt{45\,.10} = \sqrt{5.9\,.10} = \sqrt{5.9\,.5.2} = \sqrt{2.5^2.9} = \sqrt{2}.\sqrt{5^2}.\sqrt{9} = \sqrt{2}\,.5\,.3 = 15.\sqrt{2}$

(Využili sme, že vieme odmocniť číslo 9 (už sme ho nerozkladali na 3.3) a že druhá mocnina a druhá odmocnina nad číslom 5 sa navzájom „zrušia“.)

5.1.
Čiastočne odmocnite :

a.) $\sqrt{75}$	d.) $\sqrt{72}$	g.) $\sqrt{250}$	j.) $\sqrt{980}$
b.) $\sqrt{40}$	e.) $\sqrt{96}$	h.) $\sqrt{192}$	k.) $\sqrt{384}$
c.) $\sqrt{18}$	f.) $\sqrt{128}$	i.) $\sqrt{288}$	l.) $\sqrt{486}$

5.2.
Čiastočne odmocnite :

a.) $\sqrt[3]{32}$	c.) $\sqrt[3]{128}$	e.) $\sqrt[3]{81\,000}$
b.) $\sqrt[3]{54}$	d.) $\sqrt[3]{56}$	f.) $\sqrt[3]{40}$

6. Usmernenie zlomkov

Väčšina odmocnín sú iracionálne čísla. Ak sa odmocnina vyskytuje v menovateli zlomku a zlomok treba vyčísliť, museli by sme deliť viacciferným deliteľom. Preto sa usilujeme odmocninu z menovateľa zlomku odstrániť. Robíme to vhodným rozšírením zlomku. Takýto postup sa volá **usmerňovanie zlomkov.**

Vieme, že každý zlomok (resp. každé číslo) môžeme vynásobiť číslom 1 a jeho hodnota sa nezmení. Číslo 1 vždy zapíšeme vo vhodnom tvare, podľa toho, akú odmocninu z menovateľa potrebujeme odstrániť. Budeme teda využívať , že 1 = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \cdots$

Príklad :
Usmernite zlomky : $\frac{5}{\sqrt{2}}$, $\frac{22}{\sqrt{11}}$, $\frac{8}{\sqrt{12}}$.
Každý zo zlomkov vynásobíme číslom 1 vo vhodnom tvare závisiacom od odmocniny, ktorú chceme odstrániť. V prípade, že sa dá výsledný zlomok krátiť, vykrátime ho.

$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{2}$

$\frac{22}{\sqrt{11}} = \frac{22}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{22.\sqrt{11}}{\sqrt{11}.\sqrt{11}} = \frac{22.\sqrt{11}}{11} = \frac{2\,\cancel{22}.\sqrt{11}}{\cancel{11}\,1} = 2.\sqrt{11}$

$\frac{8}{\sqrt{12}} = \frac{8}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{8.\sqrt{12}}{\sqrt{12}.\sqrt{12}} = \frac{8.\sqrt{12}}{12} = \frac{2\,\cancel{8}.\sqrt{12}}{\cancel{12}\,3} = \frac{2.\sqrt{12}}{3}$ tu by sme mohli ešte čiastočne odmocniť číslo 12, $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2.\sqrt{3}$ a dostaneme potom výsledok : $\frac{2.\sqrt{12}}{3} = \frac{2.2.\sqrt{3}}{3} = \frac{4.\sqrt{3}}{3}$

6.1.

Usmernite zlomky :

a.) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ c.) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ e.) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ g.) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ i.) $\frac{21}{\sqrt{7}}$

b.) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ d.) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ f.) $\frac{5}{\sqrt{15}}$ h.) $\frac{24}{\sqrt{6}}$ j.) $\frac{4}{\sqrt{14}}$

Výsledky :

1. Mocniny s prirodzeným exponentom

1.1.
a.) 8; **b.)** 27 000; **c.)** 100 000; **d.)** 0,064; **e.)** $\frac{16}{81}$; **f.)** 25.

1.2.
a.) x^{16}; **b.)** $30x^{12}$; **c.)** a^{42}; **d.)** y^6; **e.)** a^2; **f.)** y.

1.3.
a.) $225a^8$; **b.)** x^4; **c.)** 3; **d.)** u^2v^2; **e.)** $2x^6a^{11}$; **f.)** k^2.

2. Mocniny s celočíselným exponentom

2.1.
a.) $\frac{1}{49}$; **b.)** 8; **c.)** $\frac{1}{4}$; **d.)** $\frac{36}{25}$; **e.)** $\frac{1}{3}$; **f.)** 1; **g.)** 9; **h.)** $\frac{1}{125}$.

2.2.
a.) 4; **b.)** 9; **c.)** 18; **d.)** -100.

2.3.
a.) -4; **b.)** $2^7.3$; **c.)** 30; **d.)** $\frac{1}{78}$; **e.)** $\frac{1}{4}$; **f.)** $\frac{5.2^4}{3^4}=\frac{80}{81}$; **g.)** 27; **h.)** 1.

2.4.
a.) $10xy^2z^2$; **b.)** $5a^7b^{-3}$; **c.)** $2m^{-3}n^2$; **d.)** $3x^4$; **e.)** $3^{-3}x^3y^{-6}$; **f.)** $a^{-1}b^2$;
g.) $a^{-2}b^{-2}c^3$; **h.)** $a^{10}b^7c^3$.

2.5.
a.) $6a^2b^3$; **b.)** $20a^5b^4$; **c.)** $4xy^5$; **d.)** $a^2b^6c^{-5}d^{-2}$; **e.)** $a^{-4}b^4c^{60}$; **f.)** 1.

3. Zápis čísla v tvare $a.10^n$

3.1.
a.) 310000; **b.)** 27 600; **c.)** 30 000; **d.)** 1 750 000 000; **e.)** 1 280 300; **f.)** 0,045;
g.) 0,000 000 128; **h.)** 0, 0055; **i.)** 0,0197 000 = 0,0197.

3.2.
a.) 5; **b.)** –6; **c.)** 3; **d.)** –2; **e.)** –7; **f.)** 9; **g.)** 3; **h.)** –4; **i.)** 8.

3.3.

a.) $7{,}8.\ 10^5$	**d.)** $1{,}0\ 08.\ 10^4$	**g.)** $4.\ 10^{-4}$	**j.)** $1{,}2.\ 10^{10}$
b.) $5{,}201.\ 10^3$	**e.)** $5.\ 10^{-1}$	**h.)** $1{,}7.\ 10^{-2}$	**k.)** $9.\ 10^{-5}$
c.) $6{,}4.\ 10^{-5}$	**f.)** $7{,}9\ .\ 10^2$	**i.)** $2{,}5.\ 10^1$	**l.)** $3.\ 10^{-7}$

4. Mocniny s racionálnym exponentom. Odmocniny

4.1.

a.) $\sqrt[3]{10}$ **c.)** $\sqrt[11]{8}$ **e.)** $\sqrt[5]{3^8}$ **g.)** $\sqrt[8]{t^2} = \sqrt[4]{t}$

b.) $\sqrt{r^5}$ **d.)** $\sqrt[9]{x}$ **f.)** $\sqrt[7]{y^{16}}$ **h.)** $\sqrt[10]{m^4} = \sqrt[5]{m^2}$

4.2.

a.) $b^{\frac{7}{3}}$ **c.)** $x^{\frac{-2}{5}}$ **e.)** $b^{\frac{17}{2}}$ **g.)** $z^{\frac{2}{15}}$

b.) $x^{\frac{-8}{4}} = x^{-2}$ **d.)** $a^{\frac{6}{2}} = a^3$ **f.)** $y^{\frac{11}{6}}$ **h.)** $c^{\frac{4}{9}}$

4.3.

a.) $a^{\frac{17}{10}}$ **c.)** $z^{\frac{1}{6}}$ **e.)** $m^{\frac{5}{6}}$ **g.)** $x^{\frac{-7}{30}}$

b.) $a^{\frac{23}{12}}$ **d.)** $z^{\frac{20}{12}} = z^{\frac{5}{3}}$ **f.)** $a^{\frac{1}{3}}$ **h.)** 1

4.4.

a.) $a^{\frac{17}{12}}$ **c.)** $x^{\frac{7}{4}}$ **e.)** $z^{\frac{5}{20}} = z^{\frac{1}{4}}$ **g.)** $x^{\frac{45}{24}} = x^{\frac{15}{8}}$

b.) $a^{\frac{-1}{10}}$ **d.)** $a^{\frac{27}{28}}$ **f.)** 1 **h.)** $x^{\frac{4}{18}} = x^{\frac{2}{9}}$

5. Čiastočné odmocňovanie

5.1.

a.) $5.\sqrt{3}$ **d.)** $6.\sqrt{2}$ **g.)** $5.\sqrt{10}$ **j.)** $14.\sqrt{5}$

b.) $2.\sqrt{10}$ **e.)** $4.\sqrt{6}$ **h.)** $8.\sqrt{3}$ **k.)** $8.\sqrt{6}$

c.) $3.\sqrt{2}$ **f.)** $8.\sqrt{2}$ **i.)** $12.\sqrt{2}$ **l.)** $9.\sqrt{6}$

5.2.

a.) $2.\sqrt[3]{4}$ **c.)** $4.\sqrt[3]{2}$ **e.)** $30.\sqrt[3]{3}$

b.) $3.\sqrt[3]{2}$ **d.)** $2.\sqrt[3]{7}$ **f.)** $2.\sqrt[3]{5}$

6. Usmernenie zlomkov

6.1.

a.) $\frac{3.\sqrt{5}}{5}$ **c.)** $4.\sqrt{3}$ **e.)** $3.\sqrt{2}$ **g.)** $5.\sqrt{3}$ **i.)** $3.\sqrt{7}$

b.) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **d.)** $\frac{4.\sqrt{13}}{13}$ **f.)** $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **h.)** $4.\sqrt{6}$ **j.)** $\frac{2.\sqrt{14}}{7}$

ZDROJE :

Viera Kolbaská - Jarmila Janisková a kol. , Matematika pre stredné odborné školy, 1. časť, SPN, 2010, 2. vydanie

Jaroslav Barták – Štefan Bojtár – Jiří Kepka, Matematika 1 pre dvojročné a trojročné učebné odbory SOU, SPN, 1987

http://gymopatke.edupage.org/files/08_-_Mocniny_a_odmocniny.pdf

http://www.sportgymke.sk/mvd/Vyrazy/1-4-1-MocninySCelociselnymexponentomVyrazySMocninami.pdf

http://www.sportgymke.sk/mvd/Vyrazy/1-4-2-MocninySRacionalnymExponentomVyrazySMocninamiAOdmocninami.pdf

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pavlv7an/vladka/?page=MocninyQ