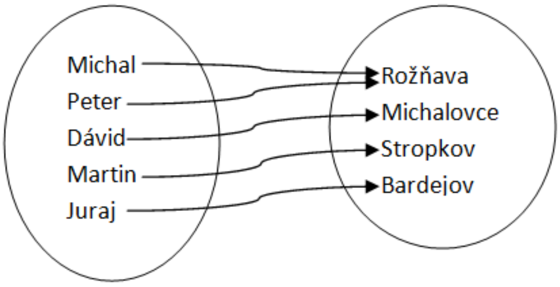
FUNKCIE A ICH ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI

Eva Zummerová

1. Funkcia. Spôsoby zadania funkcie. Graf funkcie

Funkcia je určitý spôsob priradenia. Vysvetlime si preto, čo je to priradenie. Priradenie nám vytvára dvojice – aj v bežnom živote niekomu (niečomu) niečo priraďujeme. Napríklad každému z nás bolo priradené meno. Každý z nás má priradené rodné číslo, mesto, kde sa narodil, adresu, kde býva. Každé auto má priradenú ŠPZ. Pozemok má priradené v katastri číslo parcely. Každému trojuholníku môžeme priradiť jeho obsah. Skúsme si to ukázať názornejšie.
Na internáte sa stretlo 5 chlapcov – Michal a Peter sa narodili v Rožňave, Dávid v Michalovciach, Martin v Stropkove a Juraj v Bardejove. Máme teda množinu chlapcov a množinu miest (a obcí) a každému chlapcovi vieme priradiť mesto (obec), v ktorom sa narodil. Znázornime si to graficky:

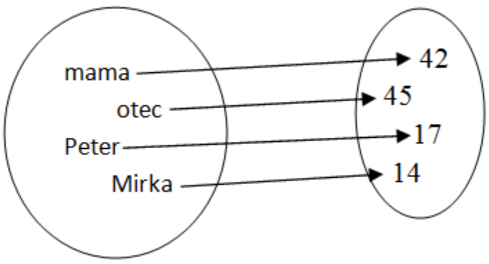


Množinu prvkov, ktorým niečo priraďujeme – v našom príklade je to množina chlapcov – budeme nazývať **definičný obor** a označovať ***D***. Druhú množinu – v našom príklade je to množina miest – budeme nazývať **obor hodnôt** a označovať ***H***. Prvkom z množiny *D* priraďujeme prvky z množiny *H*. Rozoberme si podrobnejšie náš príklad.

- Mohli by ísť od jedného mena dve šípky?
  Nemohli. Nikto sa totiž nemôže narodiť súčasne v dvoch mestách.
- Môže viac šípok smerovať do jedného mesta?
  Môže. Viacerí ľudia sa narodili v tom istom meste.
- Môže sa stať, že od nejakého mena nepôjde žiadna šípka?
  Nemôže. Každý sa niekde narodil.

Zhrnieme to: **Každému prvku z množiny *D* musíme priradiť práve jeden prvok z množiny *H*.**

Vieme už teda, čo je priradenie. Aby priradenie bolo funkciou, musíme prvkom priraďovať čísla. Skúsme teda priradiť členom rodiny ich vek. Mama má 42 rokov, otec 45, syn Peter 17 rokov a dcéra Mirka 14. Graficky to znázornime takto :



Znova si zdôraznime, že každému členovi rodiny sme priradili **práve jedno** číslo, ale viacerí členovia rodiny môžu mať priradený rovnaký vek – napríklad ak by boli v rodine dvojčatá.

Zadefinujme si teda funkciu :

Funkcia je ľubovoľný predpis (priradenie), ktorý každému prvku *x* z danej množiny *D* priradí práve jedno reálne číslo *y* z množiny *H*.

Hovoríme, že funkcia ***f*** je definovaná na množine ***D***.

Množinu ***D*** nazývame definičný obor funkcie ***f***, je to množina premennej *x*.

Množinu ***H*** nazývame obor hodnôt funkcie ***f***, je to množina premennej *y*.

Funkcie zvyčajne označujeme písmenami *f, g, h,* ... , ich definičné obory označujeme *D(f), D(g), D(h)*, obory hodnôt *H(f), H(g), H(h)*... .
To, že funkcia *f* priradí prvku *x* prvok *y* označíme $f: x \to y$, alebo $f: y = f(x)$ (*y* je funkčne závislá premenná od *x*), prípadne $[x, y] \in f$.
Funkciu môžeme zadať rôznymi spôsobmi – napríklad tabuľkou, grafom, predpisom.
Každú funkciu môžeme znázorniť graficky v pravouhlej sústave súradníc.
Grafom funkcie *f* nazývame množinu všetkých bodov so súradnicami [*x*; *f(x)*], zostrojenú v pravouhlej súradnicovej sústave, pričom $x \in D(f)$.

Príklad :
Určte, ktorou z tabuliek je určená funkcia :

x	1	2	3	4	5
y	7	7	8	8	7

- touto tabuľkou je určená funkcia, každému *x* je priradené práve jedno číslo

x	1	3	1	5	1
y	0	−7	1	−4	2

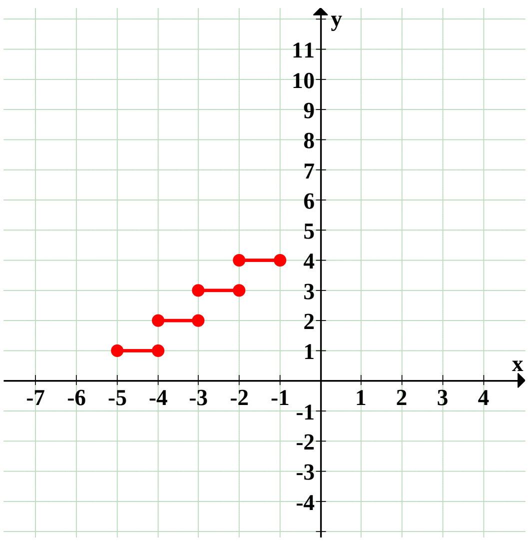
- touto tabuľkou nie je určená funkcia, premennej *x* = 1 sú priradené až 3 hodnoty : 0,1 a 2

x	1	2	3	1	4
y	5	0	1	5	6

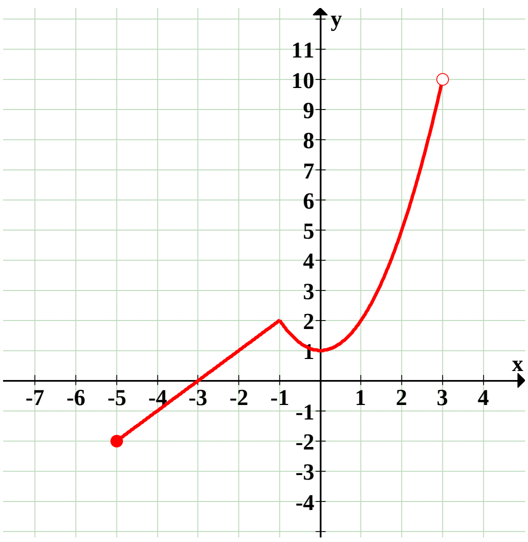
- touto tabuľkou je určená funkcia, každému *x* je priradené práve jedno číslo. Aj keď sa v tabuľke *x* = 1 vyskytuje dva krát, zakaždým je mu priradená rovnaká hodnota 5.

Príklad :
Určte, ktorý z grafov je grafom funkcie :

G1



G2



Najprv si zdôraznime: **Plný krúžok na konci krivky v grafe znamená, že koncový bod grafu patrí, prázdny krúžok znamená, že koncový bod grafu nepatrí, podobne ako pri znázorňovaní intervalov. Ak graf nie je ukončený krúžkom, znamená to, že pokračuje (vzhľadom na os *x*) až do ∞** (ak nie je ukončený na pravej strane) **, resp. do –∞** (ak nie je ukončený na ľavej strane) **.**

G1 – nie je grafom funkcie. Nájdeme tam také *x*, ktorému je priradených viac, než jedno *y*. Napríklad *x* = – 4 má priradené *y* = 1 aj *y* = 2; *x* = – 3 má priradené *y* = 2 aj *y* = 3; *x* = – 2 má priradené *y* = 3 aj *y* = 4.

G2 – je grafom funkcie. Nad /pod každým *x* nájdeme práve jedno *y* z grafu, ktoré mu je priradené.

Množina bodov v rovine – graf – **je <u>grafom funkcie</u> len vtedy, keď každá priamka rovnobežná s osou *y* pretne tento graf najviac v jednom bode.**

Príklad :
Určte, ktorým predpisom je určená funkcia : $f: y = 2x + 3, x \in \boldsymbol{R}$; $g: y^2 = x, x \in \boldsymbol{R}$.

Toto je zatiaľ náročná úloha, preto si ju uvádzame ako riešený príklad.
Pozrime sa na *f*. Môže sa stať, že jednému *x* by boli priradené viaceré čísla? Nemôže. Jednému *x* je naozaj priradené jediné *y*, ktoré vypočítame podľa predpisu $y = 2x + 3$. Takže napríklad *x* = 1 priradíme $y = 2x + 3 = 2.1 + 3 = 5$.
Prvý predpis $f: y = 2x + 3, x \in \boldsymbol{R}$ určuje funkciu.

Ako je to s predpisom g ? Tam máme druhú mocninu a my už vieme, že pri umocňovaní na párny exponent sa zo záporného čísla stáva kladné. Napríklad pre *x* = 1 budú priradené dve čísla *y* = 1 aj *y* = –1. Pre *x* = 4 budú priradené znova dve čísla *y* = 2 a *y* = –2. Pretože *y* je v tomto prípade každé reálne číslo také, že $y^2 = x = 4$. A takto by sme mohli pokračovať . Nám ale stačí, ak nájdeme jediné *x* také, že je mu priradené viac, než jedno *y* a už vieme, že to nemôže byť funkcia. Predpis g teda nie je predpisom funkcie.

1.1.
Určte, či danou tabuľkou je, alebo nie je určená funkcia :

a.)

x	– 5	– 4	– 3	– 2	0	2	3	4	5
y	–6	–2	0	–6	–2	–6	0	–6	–2

b.)

x	– 5	– 4	– 3	– 2	0	– 2	– 3	– 4	– 5
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0

c.)

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17
y	17	15	13	11	9	7	5	3	1

d.)

x	0	2	4	2	0	1	3	4	5
y	0	–1	0	–1	0	0	– 5	–2	0

e.)

x	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,1	1,8	1,2	1,4
y	2	3	4	2	5	2	4	3	1

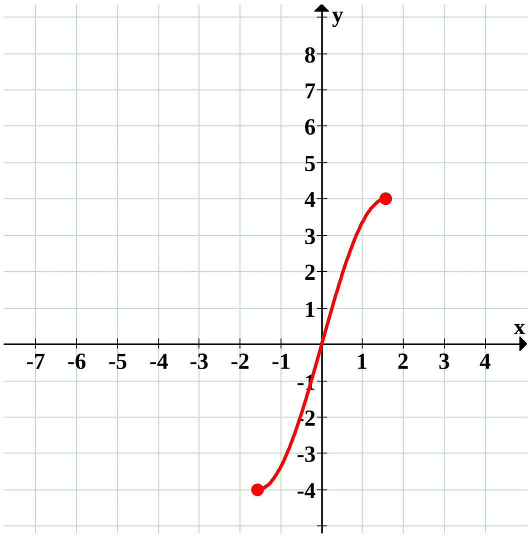
f.)

x	10	12	14	16	18	16	14	12	10
y	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1

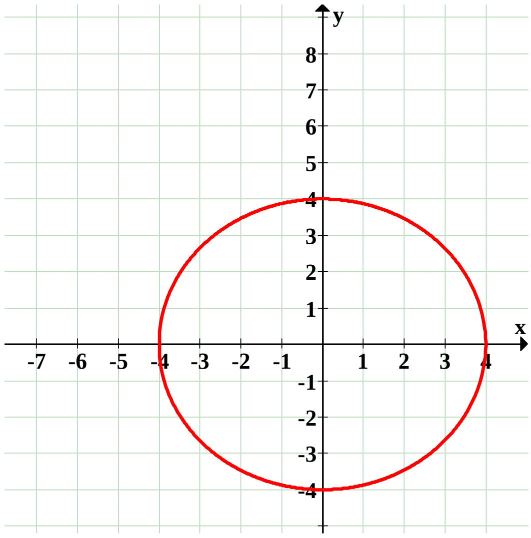
1.2.

Určte, či graf je grafom funkcie :

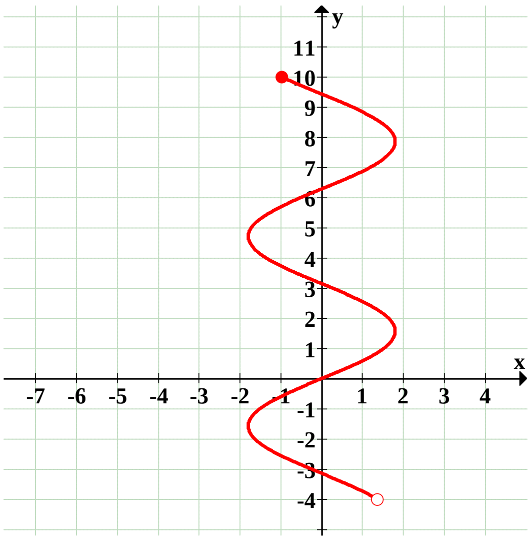
G3



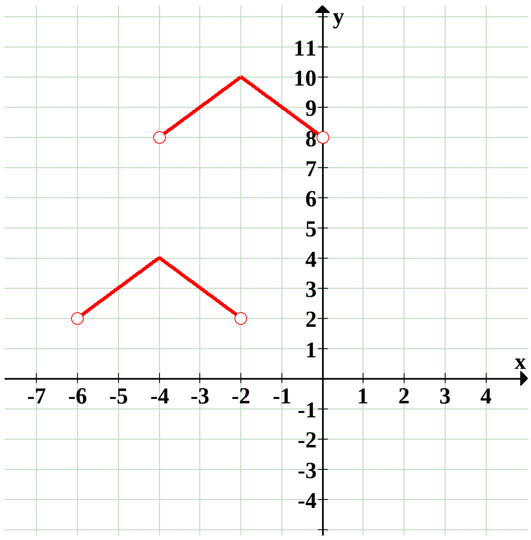
G4



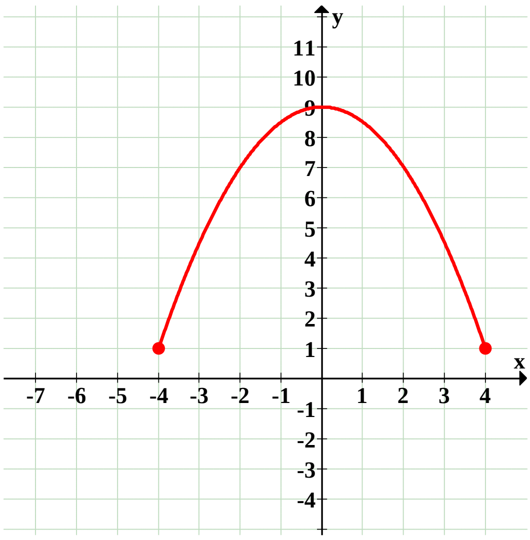
G5



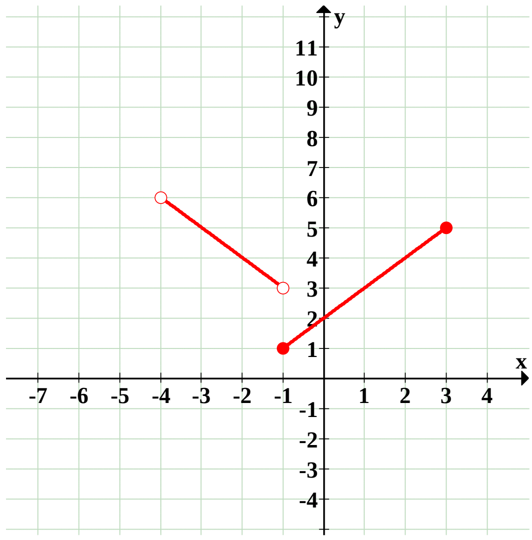
G6



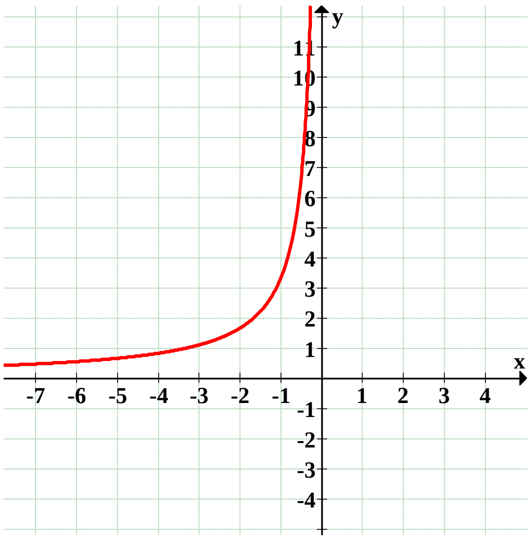
G7



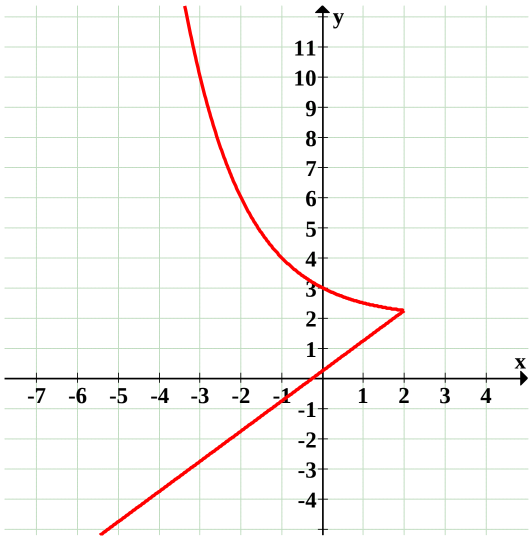
G8



G9



G10



2. Definičný obor, obor hodnôt, spojitosť funkcie

Už vieme, že **definičný obor** funkcie je množina všetkých hodnôt premennej *x*, pre ktoré je funkcia definovaná. Ak teda máme určiť definičný obor funkcie, zaujímajú nás všetky *x*, ktorým funkcia priradila nejakú hodnotu *y*.

Obor hodnôt je zase množina všetkých *y*, ktoré funkcia priradila hodnotám premennej $x \in D(f)$. Ak máme určiť obor hodnôt, budú nás zaujímať všetky hodnoty *y*, ktoré funkcia nadobúda.

So spojitosťou funkcie sme sa ešte nestretli. Veľmi jednoducho povedané, **funkcia je spojitá** vtedy, ak jej grafom je súvislá čiara, ktorá sa nikde nepretrhne. Funkcia zobrazená grafom G2 je spojitá, funkcia z grafu G8 nie je spojitá.

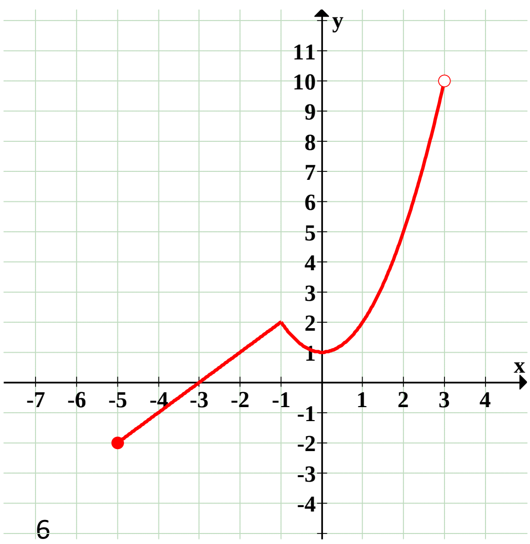
Príklad :

Určte definičný obor, obor hodnôt a spojitosť funkcií :

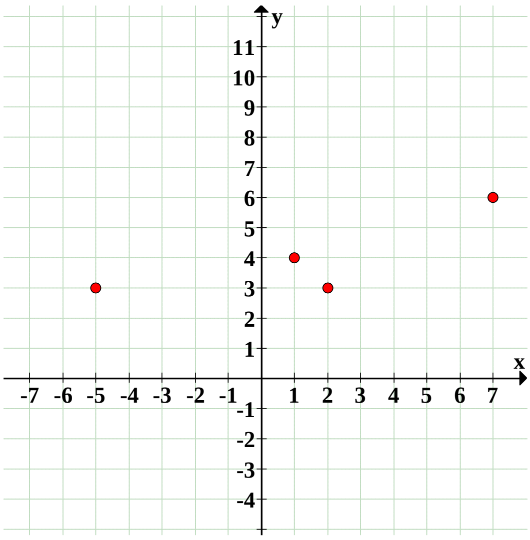
a.)

x	-5	1	2	7
y	3	4	3	6

b.)



a.) Funkciu tvoria len 4 body, keby sme chceli zostrojiť jej graf, vyzeral by takto :



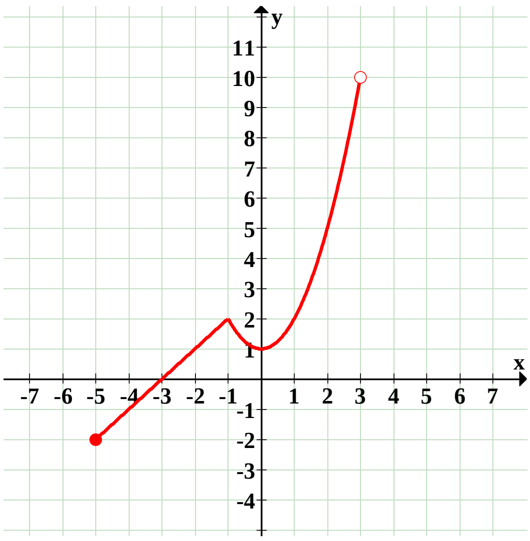
Vidíme, že nie je spojitá.

Definičný obor je množina všetkých x pre ktoré je definovaná, takže teraz sú to len 4 hodnoty, vieme ich vypísať : $D(f) = \{-5, 1, 2, 7\}$

Obor hodnôt je zase množina všetkých y, ktoré funkcia nadobúda, čiže $H(f) = \{3, 4, 6\}$.

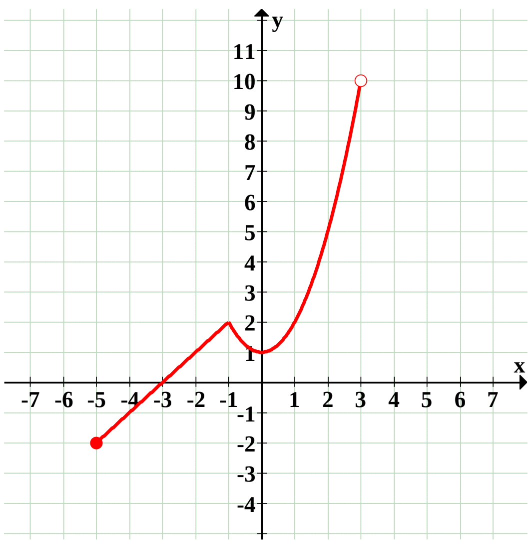
b.) Funkcia je spojitá.

Ideme určiť jej definičný obor. Pozeráme sa teda , pre ktoré všetky x je definovaná – „stiahneme“ si jej krajné body na x-ovú os, aby sme videli, „odkiaľ – pokiaľ“ je definovaná :



Bod najviac vľavo má hodnotu $x = -5$, tam funkcia „začína“ a plynulo bez pretrhnutia pokračuje až do bodu $x = 3$, ktorý jej však už nepatrí. Nemá konečný počet bodov, ako predošlá funkcia, naopak, je ich nekonečne veľa. Definičný obor preto najjednoduchšie zapíšeme ako interval – patria tam všetky čísla od -5 (vrátane) do 3. Podľa krúžkov ukončujúcich graf vidíme, či je hranica intervalu otvorená, alebo uzavretá. $D(f) = \langle -5;\ 3)$.

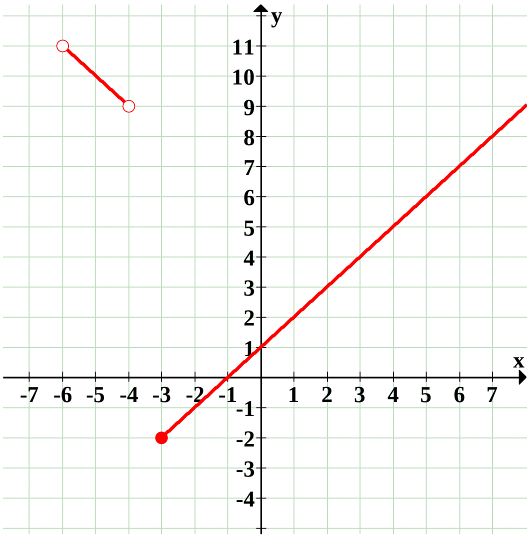
Teraz ideme určiť jej obor hodnôt. Pozeráme sa teda , ktoré všetky hodnoty y nadobúda. „Stiahneme“ si jej krajné body na y-ovú os, aby sme videli, „odkiaľ – pokiaľ“ nadobúda hodnoty :



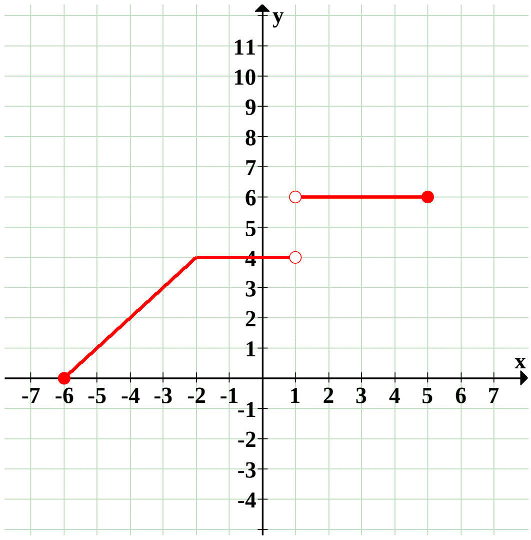
Najnižší bod má hodnotu $y = -2$, tam hodnoty funkcie začínajú a plynulo bez pretrhnutia rastú až po hodnotu $y = 10$, ktorá však už k hodnotám funkcie nepatrí. Obor hodnôt teda tvoria všetky čísla od -2 po 10, zapíšeme ho ako interval. Znova podľa ukončenia grafu vidíme, aká bude jeho ľavá a pravá hranica – otvorená alebo uzavretá. $H(f) = \langle -2;\ 10)$.

Príklad :
Určte, či je funkcia spojitá, zapíšte jej definičný obor a obor hodnôt.

a.) G11



b.) G12

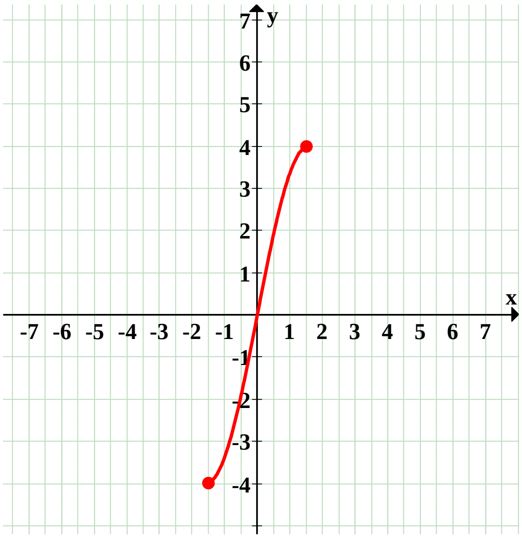


a.) Táto funkcia sa líši od všetkých, ktoré sme doteraz mali – jej graf nie je na pravej strane ukončený žiadnym krúžkom. Vieme už, že to znamená, že funkcia tam „neskončila“ – ale pokračuje ďalej pre *x* až do plus nekonečna.
Vidíme, že funkcia je „roztrhnutá“ na 2 časti – nie je spojitá. Graf funkcie pozostáva z úsečky a polpriamky.
D(*f*) : Úsečka zahŕňa *x* od –6 po –4 bez oboch krajných bodov, polpriamka zahŕňa *x* od –3 až do plus nekonečna. Medzi úsečkou a polpriamkou je na *x*-ovej osi „medzera“, pre x ∈ $\langle -4;\ -3)$ funkcia nenadobúda žiadne hodnoty – nie je tam definovaná. Definičný obor teda musíme zapísať pomocou dvoch intervalov. $D(f) = (-6; -4) \cup \langle -3;\ +\infty)$.
H(*f*) : Body úsečky nadobúdajú na osi *y* hodnoty od 9 do 11. Body polpriamky nadobúdajú na osi *y* hodnoty od –2 do plus nekonečna. Keďže v intervale $\langle -2;\ +\infty)$ už máme zahrnuté aj hodnoty intervalu (9; 11), stačí nám na zapísanie oboru hodnôt jeden interval : $H(f) = \langle -2;\ +\infty)$.

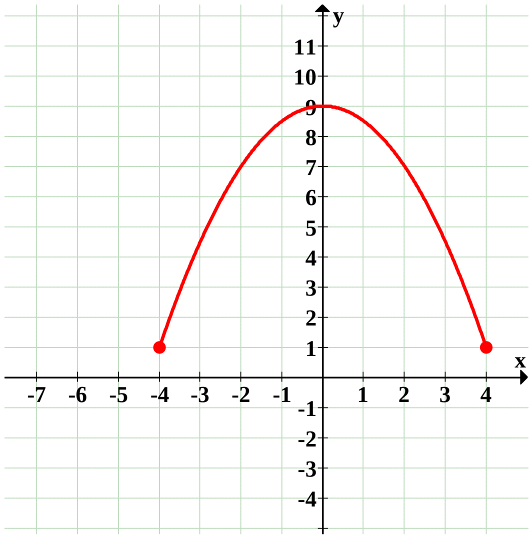
b.) Funkcia nie je spojitá.
D(*f*) : Graf začína naľavo v bode so súradnicou *x* = –6 a súvisle pokračuje až po *x* = 1. Potom sa roztrhne na 2 časti a body jeho druhej časti majú *x* – ové súradnice od 1 do 5. Problémom je bod so súradnicou *x* = 1 – taký totiž funkcii nepatrí, oba krúžky nad *x* = 1 sú prázdne. V bode *x* = 1 teda funkcia nie je definovaná. Jej definičný obor (všetky body so súradnicou *x* od –6 do 5, okrem bodu *x* = 1) musíme zapísať takto : $D(f) = \langle -6;\ 5\rangle - \{1\}$, alebo takto : $D(f) = \langle -6;\ 1) \cup (1;\ 5\rangle$.
H(*f*) : Body prvej časti grafu funkcie nadobúdajú na osi *y* všetky hodnoty od 0 do 4. Všetky body druhej časti grafu nadobúdajú jedinú rovnakú hodnotu *y* = 6. Obor hodnôt preto zapíšeme : $H(f) = \langle 0;\ 4\rangle \cup \{6\}$.

2.1.
Určte definičný obor, obor hodnôt a spojitosť funkcií zadaných grafmi G3, G7, G8, G9, G13 a G14.

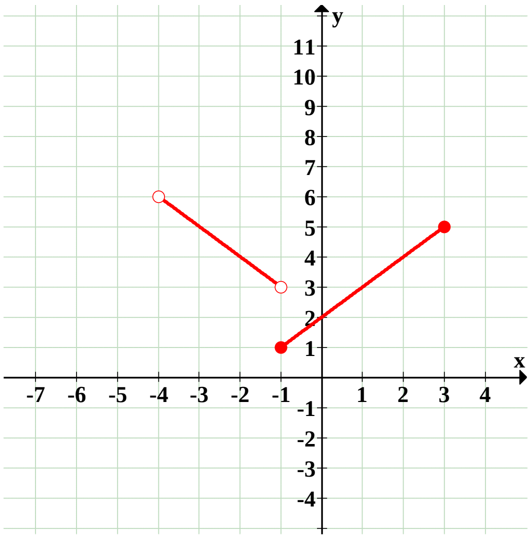
G3



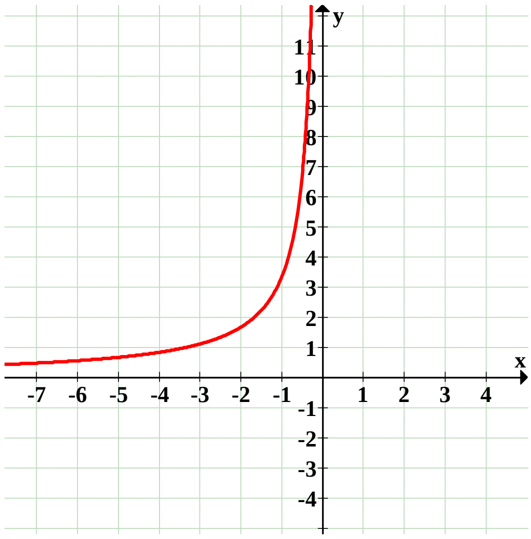
G7



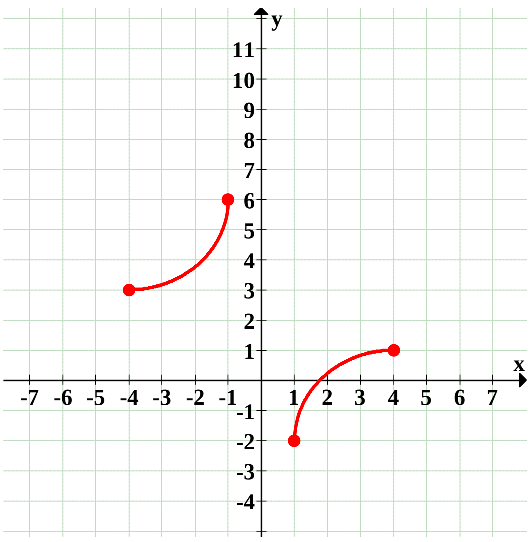
G8



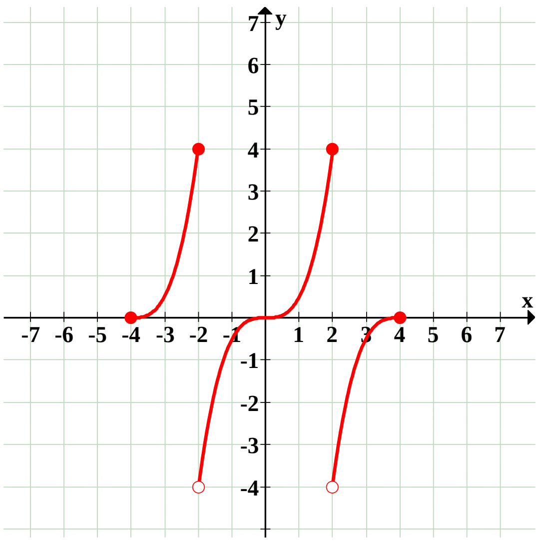
G9



G13



G14



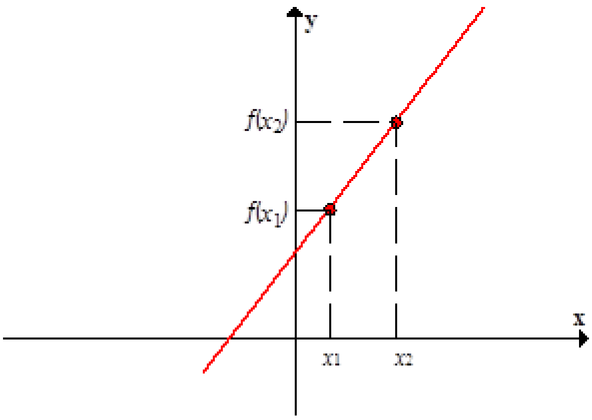
3. Monotónnosť funkcie, extrémy funkcie a ohraničenosť funkcie

Okrem definičného oboru, oboru hodnôt a spojitosti funkcie určujeme aj jej ďalšie vlastnosti. Medzi základné vlastnosti funkcie ešte patrí jej monotónnosť, ohraničenosť a extrémy.

Monotónnosť funkcie

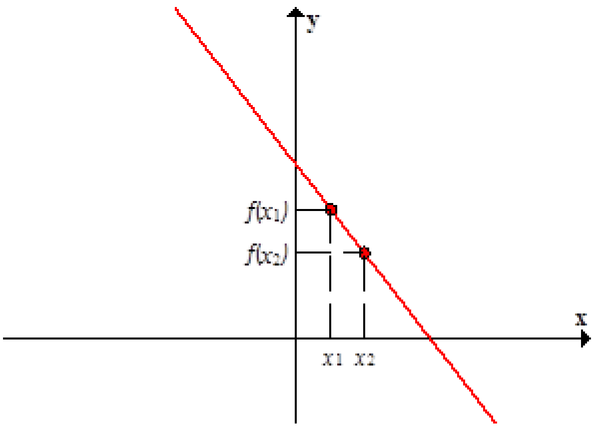
Určiť monotónnosť funkcie znamená určiť, kde je funkcia **rastúca, klesajúca** alebo **konštantná**.

Funkcia na nasledujúcom obrázku je **rastúca**. So zväčšujúcim sa x sa zväčšuje aj hodnota y, preto hovoríme, že funkcia rastie. Definujeme teda rastúcu funkciu :



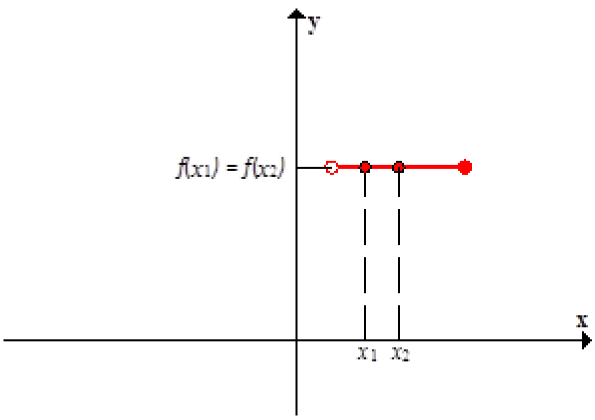
Nech M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru.
Funkcia f sa nazýva rastúca na množine $M \subseteq D(f)$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
ak $x_1 < x_2$, tak potom $f(x_1) < f(x_2)$.

Na ďalšom obrázku máme **klesajúcu** funkciu. So zväčšujúcim sa x sa zmenšuje hodnota y, preto hovoríme, že funkcia klesá. Presná definícia znie takto :



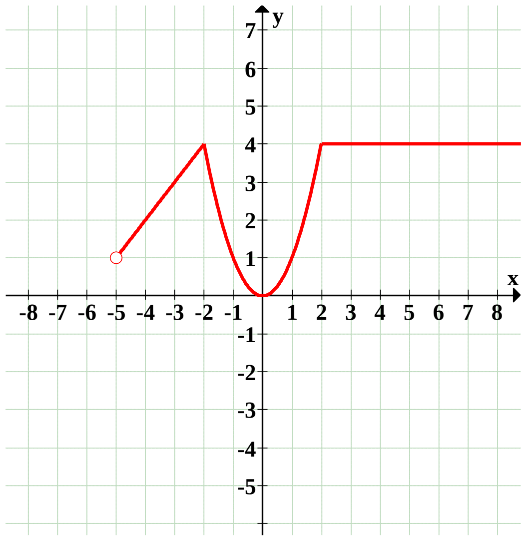
Nech M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru.
Funkcia f sa nazýva klesajúca na množine $M \subseteq D(f)$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
ak $x_1 < x_2$, tak potom $f(x_1) > f(x_2)$.

Existuje aj funkcia, ktorá ani nerastie, ani neklesá, so zväčšujúcim sa x sa hodnoty y nemenia. Funkciu potom nazývame **konštantná**, alebo **stacionárna**. Jej definícia znie nasledovne :

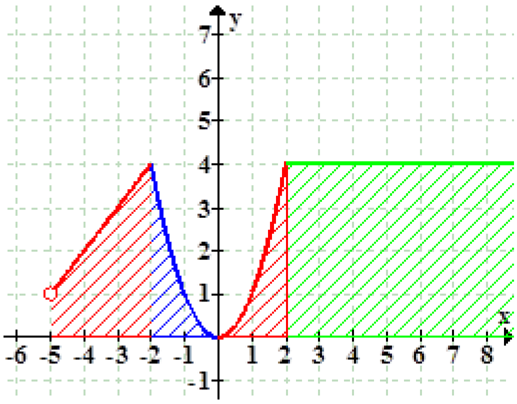


Nech M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru.
Funkcia f sa nazýva konštantná na množine $M \subseteq D(f)$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
ak $x_1 < x_2$, tak potom $f(x_1) = f(x_2)$.

Príklad :
Učte monotónnosť funkcie zadanej grafom G15 :



Vidíme, že táto funkcia nie je len rastúca alebo len klesajúca. Najprv rastie, potom klesá, potom zase rastie a nakoniec je konštantná. Rozdelíme si ju preto na tieto 4 úseky a všímame si na osi *x*, ako sú ohraničené :



Zapíšeme monotónnosť :
rastúca : $(-5;\ -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$,
klesajúca : $\langle -2; 0\rangle$,
konštantná : $\langle 2;\ +\infty)$.

Ohraničenosť funkcie

V bežnom živote sa stretávame s funkciami, ktorých hodnoty sú nejakým spôsobom obmedzené. Napríklad ak budeme od narodenia každý rok zaznamenávať svoju aktuálnu výšku, asi nikto z nás nepresiahne 250 cm ☺. Ak budeme zaznamenávať počas nasledujúceho roka (na Slovensku) každý deň teplotu vzduchu na poludnie, zrejme nikdy neklesne pod –50°C a nevystúpi nad +50 °C. Jej hodnoty teda budú „vtesnané" medzi nejaké hranice. Pri funkciách rozlišujeme ohraničenie zhora (ak existuje hodnota, nad ktorú hodnoty funkcie nevystúpia, nazývame ju horným ohraničením funkcie) a ohraničenie zdola (existuje hodnota, pod ktorú hodnoty funkcie neklesnú, nazývame ju dolným ohraničením funkcie).
Definujeme :

Funkcia *f* sa nazýva zhora ohraničená na množine *D* práve vtedy, ak existuje také číslo *h*, že pre všetky $x \in D$ platí $f(x) \le h$. Číslu *h* hovoríme horné ohraničenie funkcie.

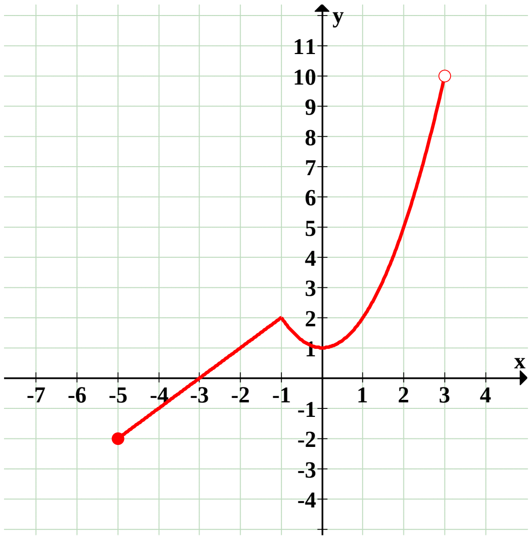
Funkcia *f* sa nazýva zdola ohraničená na množine *D* práve vtedy, ak existuje také číslo *d*, že pre všetky $x \in D$ platí $f(x) \ge d$. Číslu *d* hovoríme dolné ohraničenie funkcie.

Hovoríme, že funkcia *f* je ohraničená, ak je ohraničená zhora aj zdola.

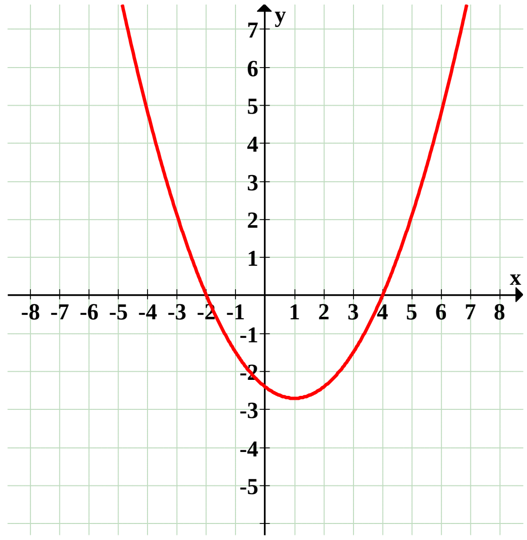
Príklad :

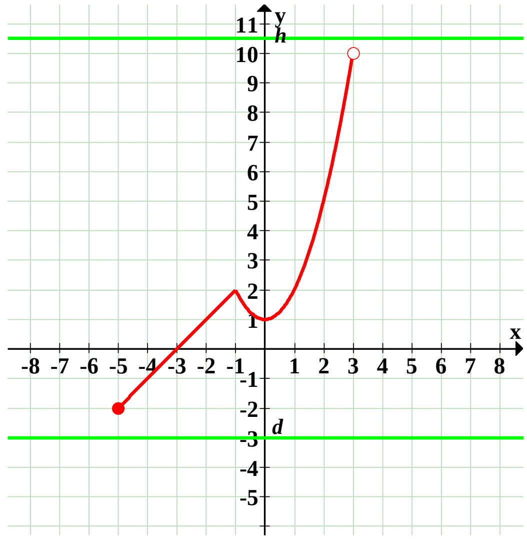
Vyšetrite ohraničenosť funkcií zadaných grafmi G2 a G16:

a.) G2

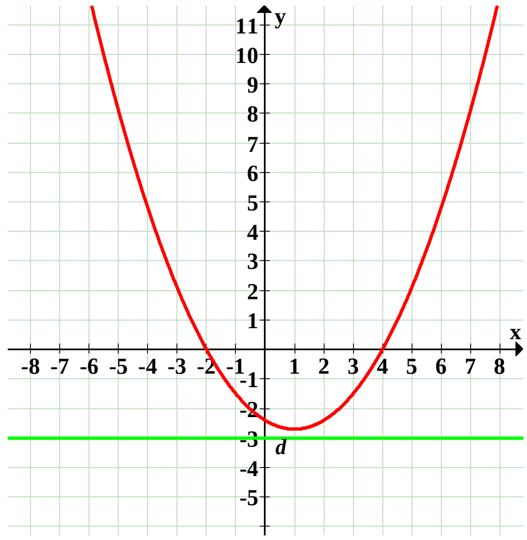


b.) G16





a.) Funkcia je ohraničená zhora aj zdola (a teda je ohraničená) . Našli sme dolné ohraničenie *d* také, že všetky bod funkcie „ležia nad ním“ a horné ohraničenie *h* také, že všetky body funkcie „ležia pod ním“. (Horné ohraničenie mohlo byť aj číslo 10 a dolné mohlo byť –2, nakoľko definícia hovorí, že všetky hodnoty funkcie sú väčšie **nanajvýš rovné** ako *d* resp. menšie **nanajvýš rovné** ako *h*.



b.) Funkcia je ohraničená zdola, ale nie je ohraničená zhora - keďže jej hodnoty rastú až do nekonečna. Dolné ohraničenie je napríklad číslo – 3.

Extrémy funkcie

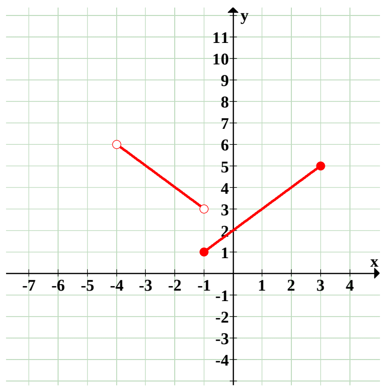
Extrém je niečo, čo sa vymyká priemeru – napríklad extrémne vysoké či nízke teploty vzduchu. Spoločným názvom **extrémy** nazývame minimum a maximum. Pod pojmom maximálny sa skrýva niečo, čo má najvyššiu číselnú hodnotu, naopak minimálny predstavuje najmenšiu číselnú hodnotu. Napríklad maximálna povolená rýchlosť, či minimálna mzda.
My budeme určovať pri funkciách len celkové – t.j. globálne maximum a globálne minimum – teda bod, v ktorom má funkcia najvyššiu resp. najnižšiu hodnotu. Taký bod musí byť len jeden, inak to nie je globálne maximum (minimum). Keďže nás zaujíma bod, potrebujeme určiť obe jeho súradnice.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $a \in D$ maximum práve vtedy, keď pre všetky $x \in D$ platí : $f(x) < f(a)$. Maximum v bode $[a, f(a)]$ budeme označovať $M[a, f(a)]$.

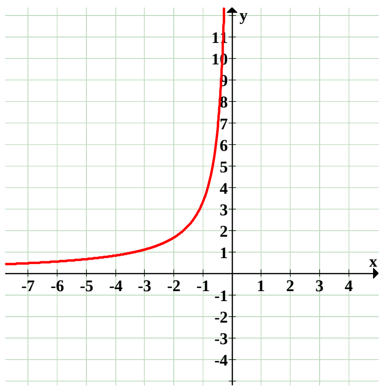
Hovoríme, že funkcia f má v bode $b \in D$ minimum práve vtedy, keď pre všetky $x \in D$ platí : $f(x) > f(b)$. Minimum v bode $[b, f(b)]$ budeme označovať $m[b, f(b)]$.

Príklad :
Nájdite extrémy nasledujúcich funkcií :

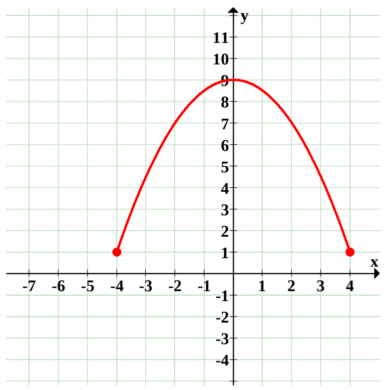
a.) G8



b.) G9



c.) G7



a.) Funkcia má minimum – vidíme, že jej „najnižší“ bod má (na osi y) hodnotu 1 a tento bod patrí funkcii. Jeho x –ová súradnica je –1, preto zapíšeme : **m[–1, 1]**.
Najvyšší bod funkcie má hodnotu 6, ale tento bod je vyznačený prázdnym krúžkom, nepatrí teda funkcii a preto funkcia **nemá maximum**.

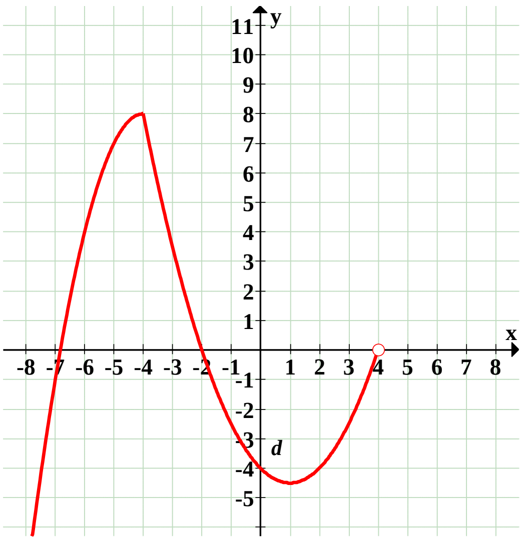
b.) Funkcia nie je ohraničená zhora, jej hodnoty rastú pozdĺž osi y až do nekonečna, preto funkcia **nemá maximum**. Zdola síce funkcia ohraničená je, vidíme, že jej hodnoty sú kladné, blížia sa k nule, ale nikdy ju nedosiahnu. Neexistuje jeden bod, ktorý by bol najnižšie zo všetkých, keďže funkcia smerom do $-\infty$ stále klesá. Funkcia preto **nemá minimum**.

c.) Maximum funkcie nájdeme ľahko – je to jediný bod, ktorý je „najvyššie zo všetkých“ a jeho súradnice sú [0, 9]. Funkcia teda má maximum **M[0, 9]**. Má aj „najnižšie“ body - [–4, 1] a [4, 1]. Tieto „najnižšie“ body sú však dva a preto neexistuje jeden, ktorý je nižšie, než všetky ostatné, funkcia preto **nemá minimum**.

4. Funkcie a ich základné vlastnosti

Príklad :

Určte základné vlastnosti funkcie *f* :



Pripomeňme si, aké vlastnosti vieme určiť :

- definičný obor
- obor hodnôt
- spojitosť
- monotónnosť – intervaly, kde je funkcia rastúca, klesajúca, konštantná
- ohraničenosť – zhora aj zdola
- extrémy – minimum a maximum.

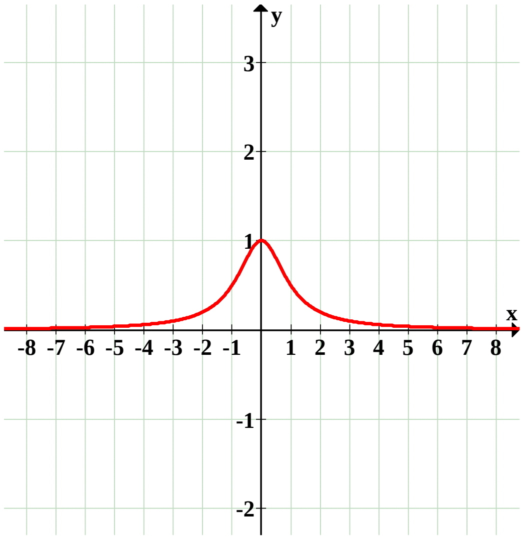
Nezabudnime, že intervaly monotónnosti popisujeme podľa osi *x*.
Poďme teda určiť vlastnosti zadanej funkcie :

D (*f*) = $(-\infty;\ 4)$;
H (*f*) = $(-\infty;\ 8\rangle$;
je spojitá
rastie na $(-\infty; -4\rangle \cup \langle 1;\ 4)$
klesá na $\langle -4;\ 1\rangle$
je ohraničená zhora
nie je ohraničená zdola
nemá minimum
$\mathrm{M}[-4,\ 8]$.

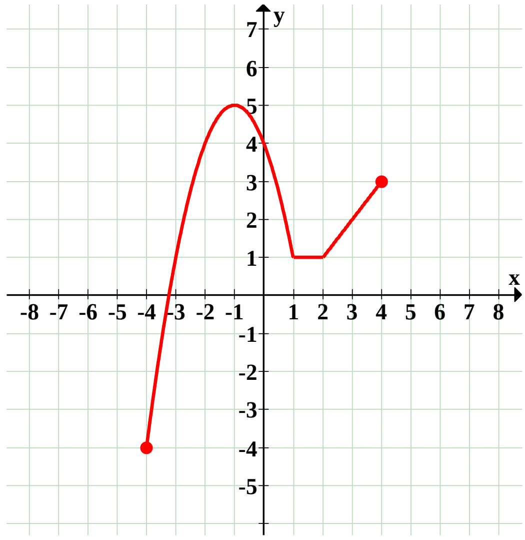
4.1.

Určte vlastnosti nasledujúcich funkcií :

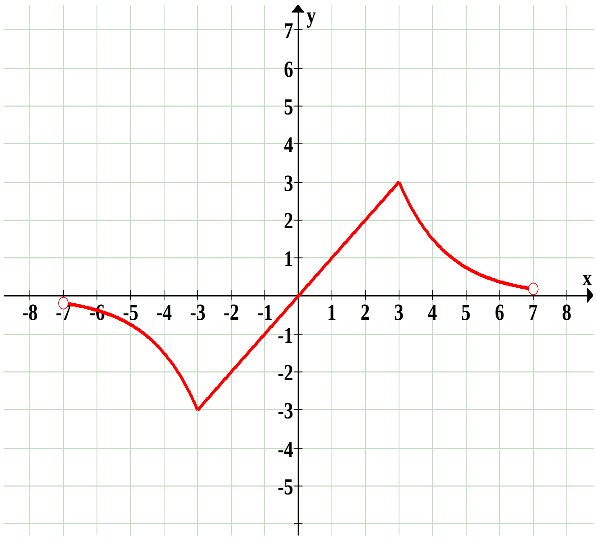
a.)



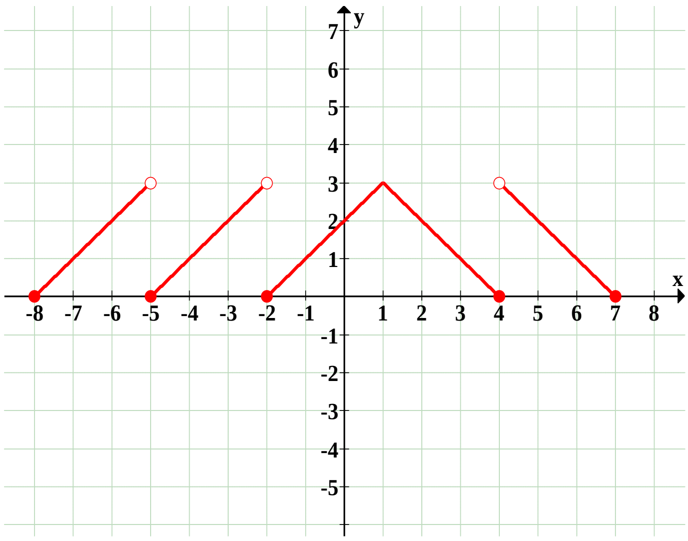
b.)



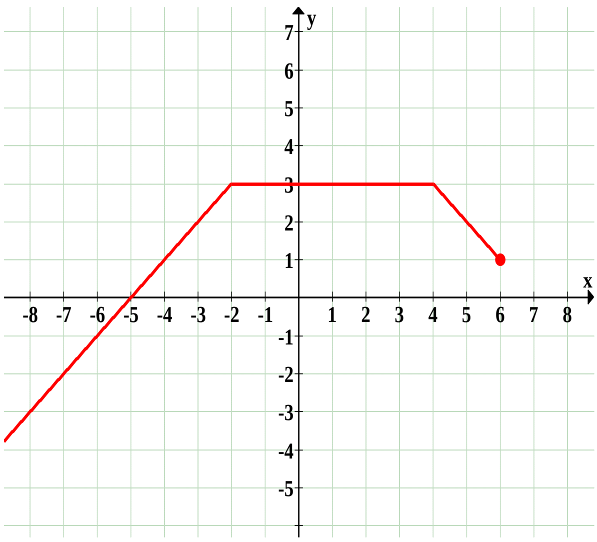
c.)



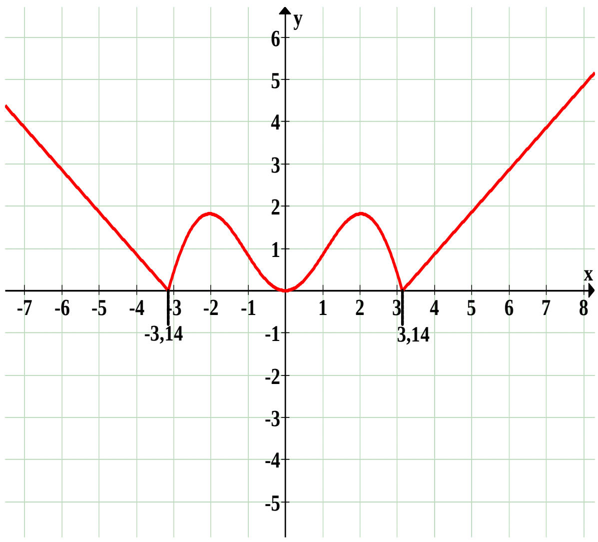
d.)



e.)



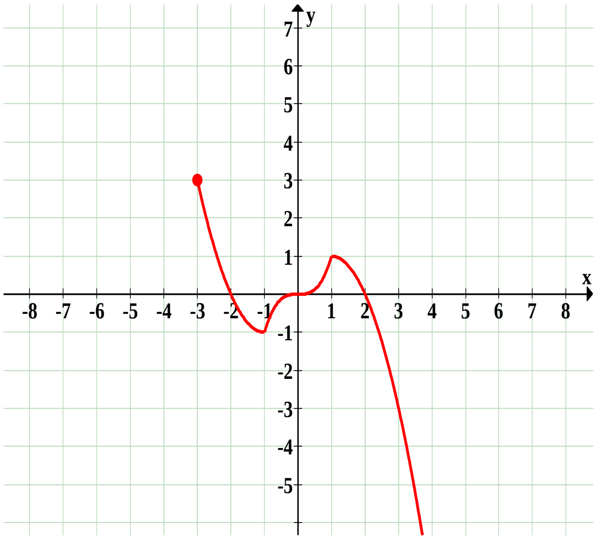
f.)



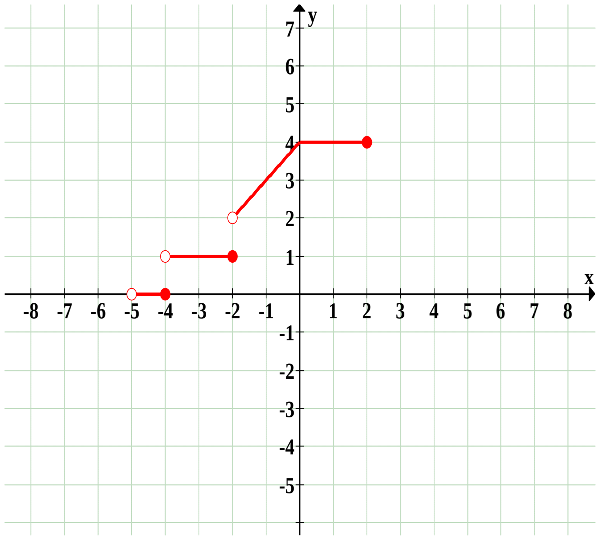
4.2.

Určte vlastnosti nasledujúcich funkcií :

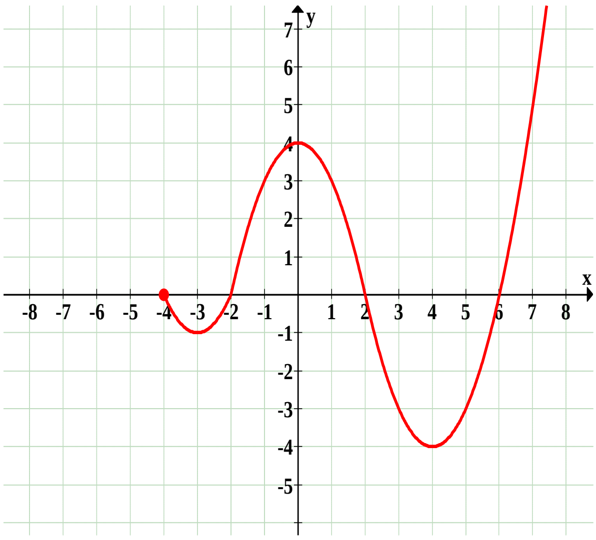
a.)



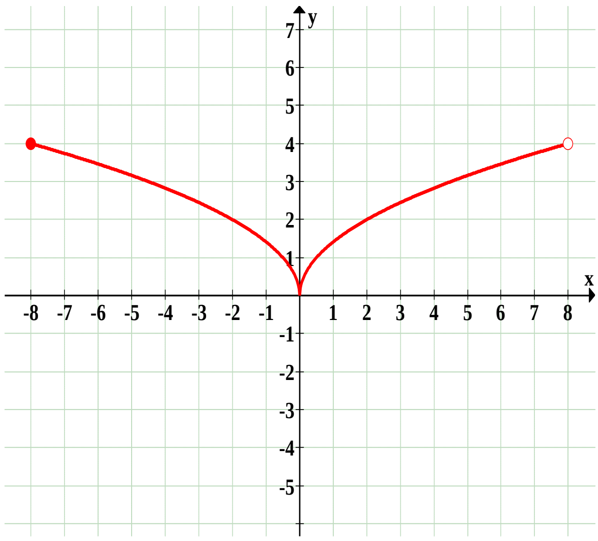
b.)



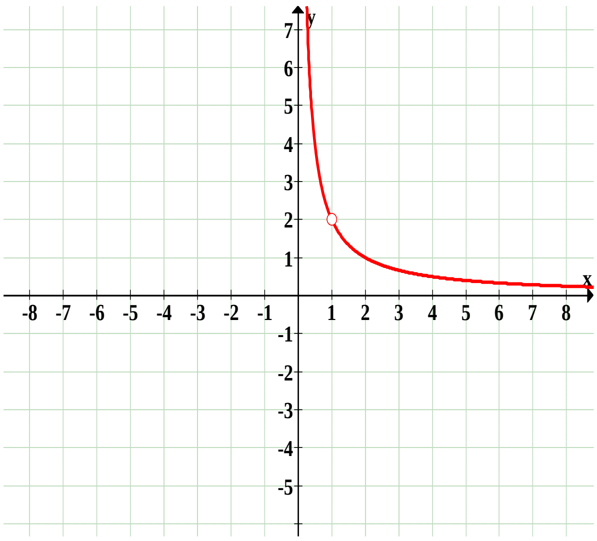
c.)



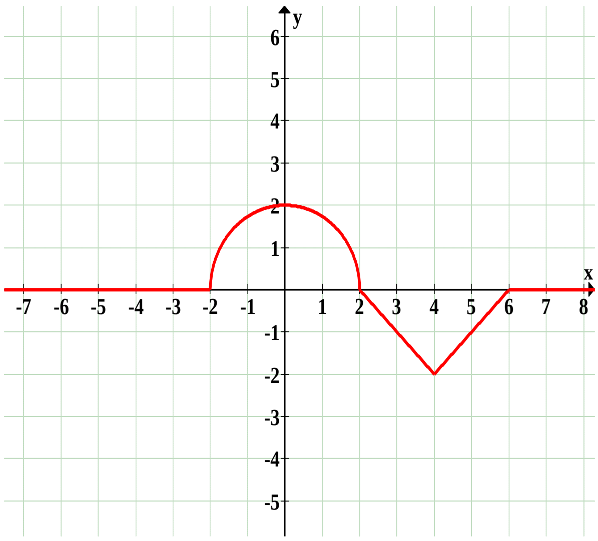
d.)



e.)



f.)



Výsledky :

1. Funkcia. Spôsoby zadania funkcie. Graf funkcie

1.1.
a.) áno; **b.)** áno; **c.)** áno; **d.)** nie; **e.)** áno; **f.)** nie.

1.2.
G3 – áno; **G4** – nie; **G5** – nie; **G6** – nie; **G7** – áno; **G8** – áno; **G9** – áno; **G10** – nie.

2. Definičný obor, obor hodnôt, spojitosť funkcie

2.1.
G3 : $D(f) = \langle -1{,}5;\ 1{,}5\rangle$; $H(f) = \langle -4; 4\rangle$; spojitá;
G7 : $D(f) = \langle -4;\ 4\rangle$; $H(f) = \langle 1; 9\rangle$; spojitá;
G8 : $D(f) = (-4; 3\rangle$; $H(f) = \langle 1; 6)$; nie je spojitá;
G9 : $D(f) = (-\infty; 0)$; $H(f) = (0; +\infty)$; spojitá;
G13 : $D(f) = \langle -4;\ -1\rangle \cup \langle 1;\ 4\rangle$; $H(f) = \langle -2;\ 1\rangle \cup \langle 3;\ 6\rangle$; nie je spojitá;
G14 : $D(f) = \langle -4;\ 4\rangle$; $H(f) = (-4;\ 4\rangle$; nie je spojitá.

4. Funkcie a ich základné vlastnosti

4.1.

a.)
$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
$H(f) = (0;\ 1\rangle$
je spojitá
rastie na $(-\infty;\ 0\rangle$
klesá na $\langle 0; +\infty)$
je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
nemá minimum
$\mathrm{M}[0,\ 1]$

b.)
$D(f) = \langle -4; 4\rangle$
$H(f) = \langle -4;\ 5\rangle$
je spojitá
rastie na $\langle -4;\ -1\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$
klesá na $\langle -1; 1\rangle$
konštantná na $\langle 1; 2\rangle$
je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
$\mathrm{m}[-4, -4]$
$\mathrm{M}[-1,\ 5]$

c.)
$D(f) = (-7;\ 7)$
$H(f) = \langle -3;\ 3\rangle$
je spojitá
rastie na $\langle -3; 3\rangle$
klesá na $(-7;\ -3\rangle \cup \langle 3; 7)$
je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
$\mathrm{m}[-3, -3]$
$\mathrm{M}[3,\ 3]$

d.)
$D(f) = \langle -8; 7\rangle$
$H(f) = \langle 0; 3\rangle$
nie je spojitá
rastie na $\langle -8;\ -5) \cup \langle -5;\ -2) \cup \langle -2; 1\rangle$
klesá na $\langle 1; 4\rangle \cup (4;\ 7\rangle$
je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
minimum nemá
$\mathrm{M}[1,\ 3]$

e.)
D (f) = $(-\infty;\ 6\rangle$
H (f) = $(-\infty;\ 3\rangle$
je spojitá
rastie na $(-\infty;\ -2\rangle$
klesá na $\langle 4;\ 6\rangle$
konštantná na $\langle -2; 4\rangle$
je ohraničená zhora
nie je ohraničená zdola
minimum nemá
maximum nemá

f.)
D (f) = $(-\infty;\ +\infty)$
H (f) = $\langle 0;\ +\infty)$
je spojitá
rastie na $\langle -3{,}14;\ -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle \cup \langle 3{,}14;\ +\infty)$
klesá na $(-\infty;\ -3{,}14\rangle \cup \langle -2; 0\rangle \cup \langle 2;\ 3{,}14\rangle$
nie je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
minimum nemá
maximum nemá

4.2.

a.)
D (f) = $\langle -3;\ +\infty)$
H (f) = $(-\infty;\ 3\rangle$
je spojitá
rastie na $\langle -1;\ 1\rangle$
klesá na $\langle -3;\ -1\rangle \cup \langle 1;\ +\infty)$
je ohraničená zhora
nie je ohraničená zdola
nemá minimum
$\mathrm{M}[-3,\ 3]$

b.)
D (f) = $(-5;\ 2\rangle$
H (f) = $\{0; 1\} \cup (2;\ 4\rangle$
nie je spojitá
rastie na$(-2;\ 0\rangle$
konštantná na $(-5;\ 4\rangle \cup (4;\ -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$
je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
nemá minimum
nemá maximum

c.)
D (f) = $\langle -4;\ +\infty)$
H (f) = $\langle -4;\ +\infty)$
je spojitá
rastie na $\langle -3; 0\rangle \cup \langle 4;\ +\infty)$
klesá na $\langle -4;\ -3\rangle \cup \langle 0;\ 4\rangle$
nie je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
$\mathrm{m}[4, -4]$
nemá maximum

d.)
D (f) = $\langle -8; 8)$
H (f) = $\langle 0; 4\rangle$
je spojitá
rastie na $\langle 0;\ 8)$
klesá na $\langle -8; 0\rangle$
je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
$\mathrm{m}[0,\ 0]$
$\mathrm{M}[-8,\ 4]$

e.)
D (f) = $(0; 1) \cup (1;\ +\infty)$ resp. $(0;\ +\infty) - \{1\}$
H (f) = $(0; 2) \cup (2;\ +\infty)$ resp. $(0;\ +\infty) - \{2\}$
nie je spojitá
klesá na celom D (f)= $(0;\ +\infty) - \{1\}$
nie je ohraničená zhora
je ohraničená zdola
minimum nemá
maximum nemá

f.)
D (f) = $(-\infty;\ +\infty)$
H (f) = $\langle -2;\ 2\rangle$
je spojitá
rastie na $\langle -2;\ 0\rangle \cup \langle 4; 6\rangle$
klesá na $\langle 0; 4\rangle$
konštantná na $(-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 6;\ +\infty)$
je ohraničená zhora aj zdola
$\mathrm{m}[4, -2]$
$\mathrm{M}[0, 2]$

ZDROJE :

Viera Kolbaská - Jarmila Janisková a kol. , Matematika pre stredné odborné školy, 2. časť, SPN, 2009, 1. vydanie

http://www.galeje.sk/web_object/9441.pdf

http://www.galeje.sk/web_object/9442.pdf

http://www.galeje.sk/web_object/9444.pdf

http://www.galeje.sk/web_object/9445.pdf

http://www.galeje.sk/web_object/9443.pdf

http://www.padowan.dk/bin/Graph-Czech.pdf

http://matematika-lucerna.cz/graph/navod-graph.pdf

Softvér Graph 4.4 . Dostupný na internete. http://www.padowan.dk/download/